



کارگاه بهسازی و توانمندسازی مدرسان آموزش ریاضی کارشناسی ابتدایی
دانشگاه فرهنگیان

ساختار مفهومی کسرها و تفکر نسبیتی

مهدخت نقیبی

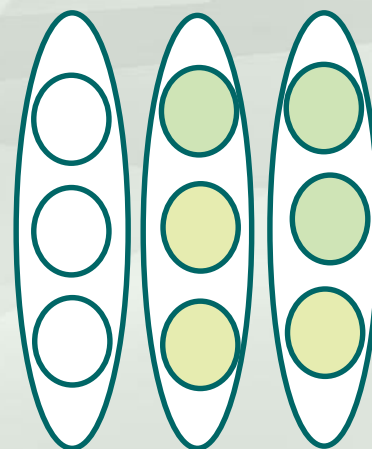
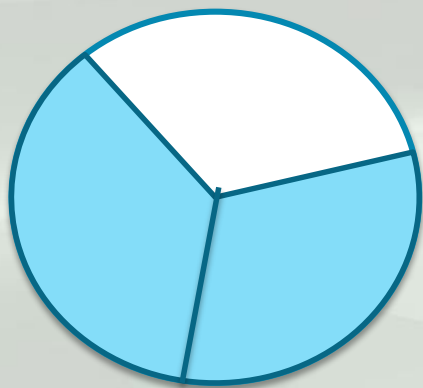
- منشا پیدایش کسرها
- اهمیت کسرها
- مشکلات دانش آموزان در ارتباط با کسرها
- تعبیر مختلف کسرها
- مفاهیم کلیدی در فهم کسر : تک-جزء ، تقسیم برابر

تعبیر مختلف کسرها ($\frac{a}{b}$ که $b \neq 0$) از دید کیپرن :

- **جز- کل :** رابطه بین جز و کل
(تقسیم یک کل به چند قسمت مساوی و سپس انتخاب تعدادی از این قسمت‌ها)
- **اندازه :** اندازه یک مقدار بر حسب یک واحد تعریف شده و زیر واحدهای آن.
- **خارج قسمت :** نتیجه تقسیم مساوی یک مقدار بین چند دسته
- **نسبت :** رابطه بین دو مقدار
- **عملگر ضربی :** نوعی تبدیل که روی یک مقدار اثر می‌کند.

۱- تعبیر جز-کل:

تقسیم یک کل به چند قسمت (جزء) مساوی و سپس انتخاب تعدادی از این قسمت‌ها (جزء‌ها).



کسر به تعبیر جز-کل

مانند نمونه‌ها برای هر شکل یک کسر مناسب بنویسید.

کار در کلاس



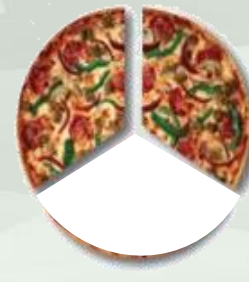
			
_____	_____	_____	_____
			
_____	_____	_____	_____

۲- تعبیر خارج قسمت:

نتیجه تقسیم مساوی یک مقدار بین چند دسته است.



$$2 \div 3$$

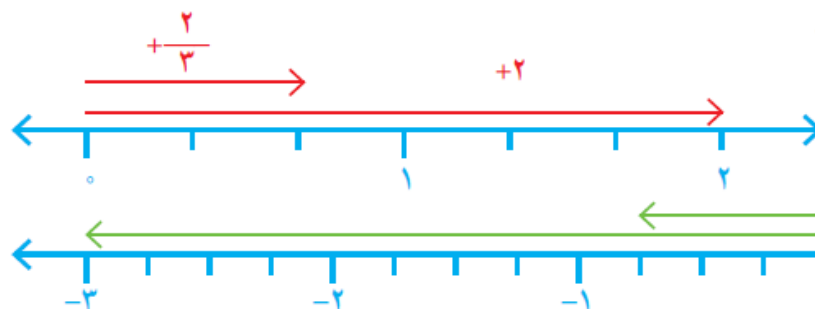


کسر به تعبیر تقسیم

فعالیت



۱- چگونه می‌توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده‌اند، درستی تساوی‌ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.



$$+2 \div 3 = \frac{+2}{3} = +\frac{2}{3}$$

$$-3 \div 4 = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$$

۲- مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید.

$$\frac{-2}{3} = -2 \div 3 = -(2 \div 3) = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

$$-\frac{4}{7} =$$

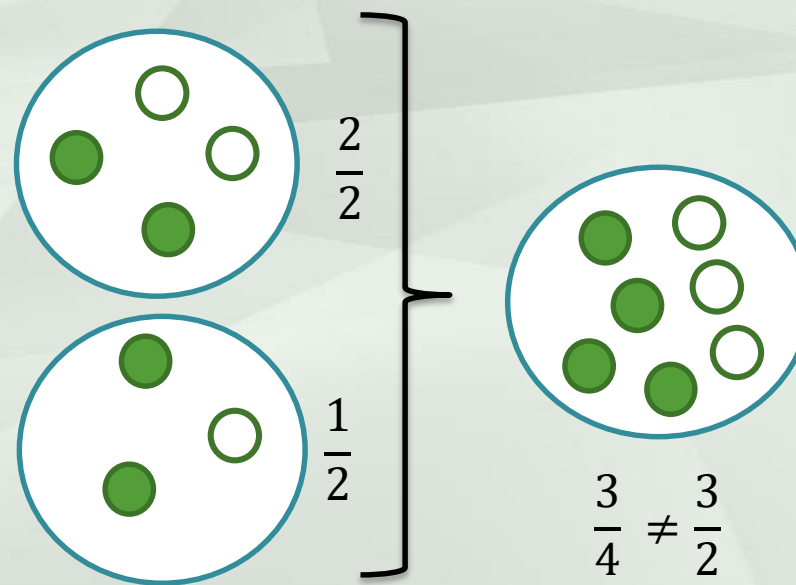
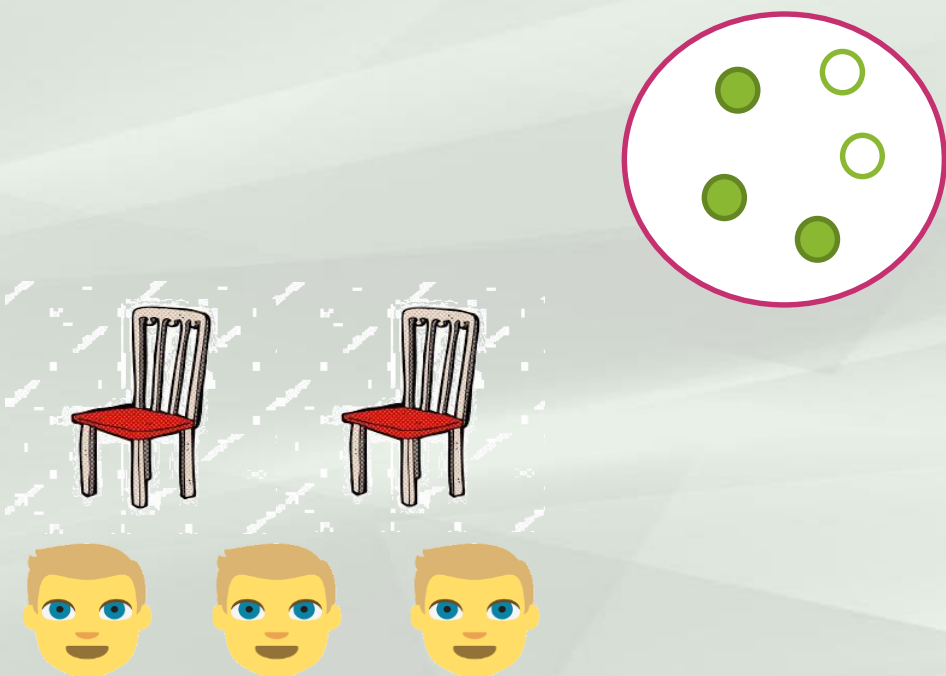
$$\frac{-3}{-4} =$$

کتاب ریاضی پایه هشتم ص ۹

به هر عدد که بتوان به صورت کسر $\frac{a}{b}$ که در آن a و b عددهای صحیح باشند و $b \neq 0$ نوشت، عدد گویا می‌گوییم.

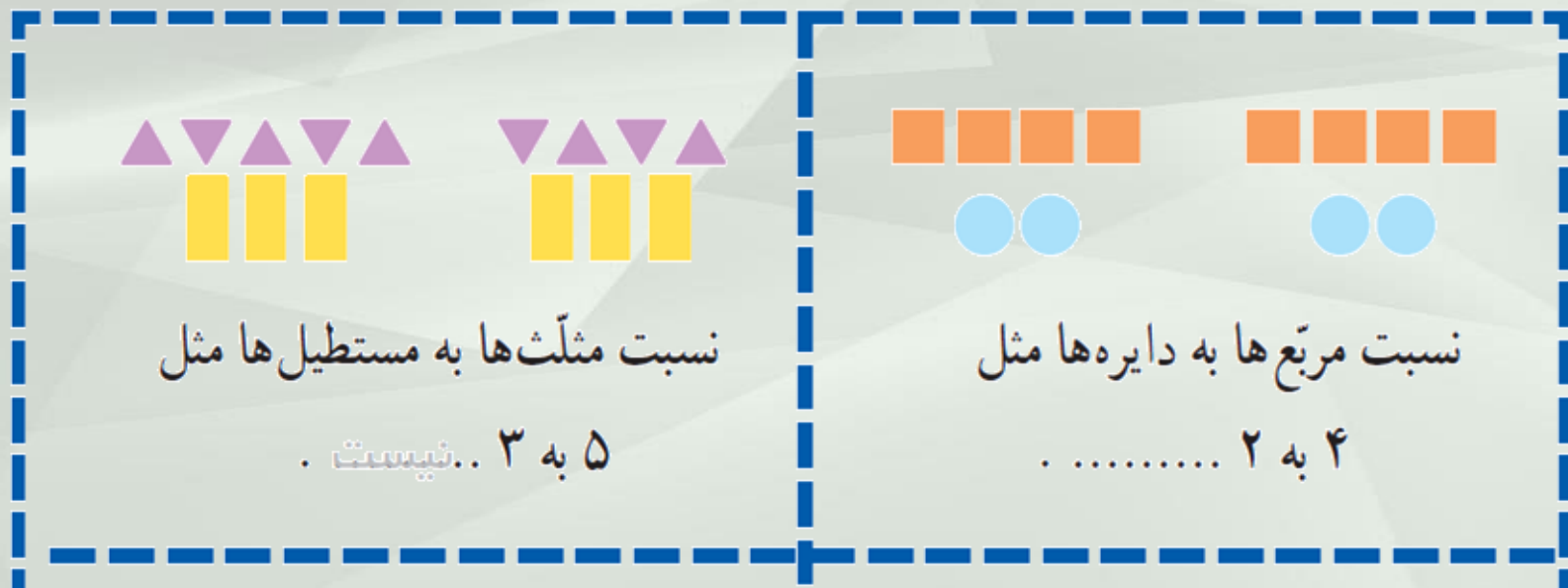
۳- تعبیر نسبت:

مقایسه دو مقدار توسط یک نسبت است.



کسر به تعبیر نسبت

در این جا، نسبت مستطیل ها به دایره ها مثل ۴ به ۳ است. هم چنین، می توان گفت که نسبت دایره ها به مستطیل ها، مثل ۳ به ۴ است.



کتاب ریاضی پایه پنجم ص ۳۷

۴- عملگر ضربی:

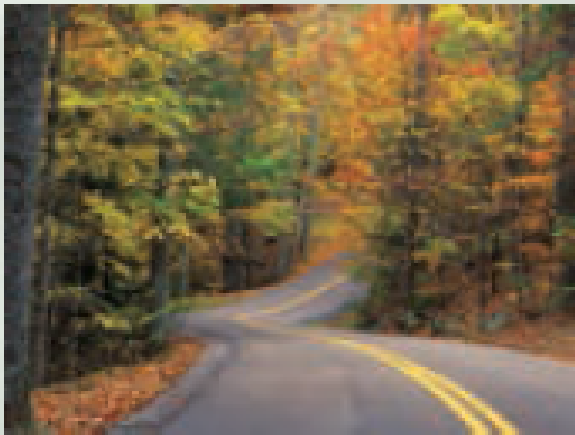
نوعی تبدیل که روی یک مقدار اثر می‌کند.

$$1 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{3}$$

$$1 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} \frac{2}{3}$$

کسر به تعبیر عملگر

۲- طول یک راه ۱۲۰ کیلومتر است. $\frac{۲}{۳}$ این مسیر چند کیلومتر است؟

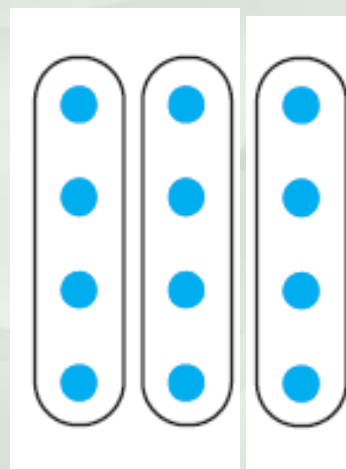
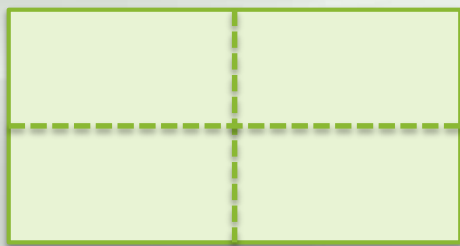


کتاب ریاضی پایه ششم ص ۱۱

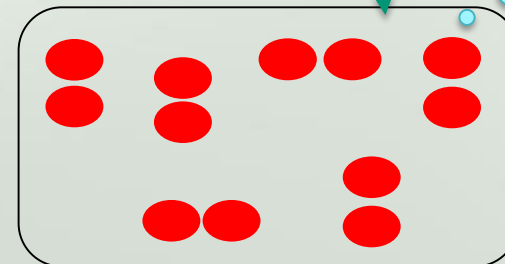
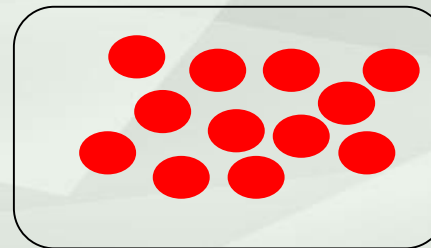
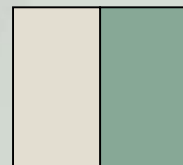
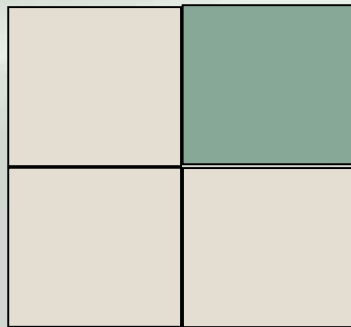
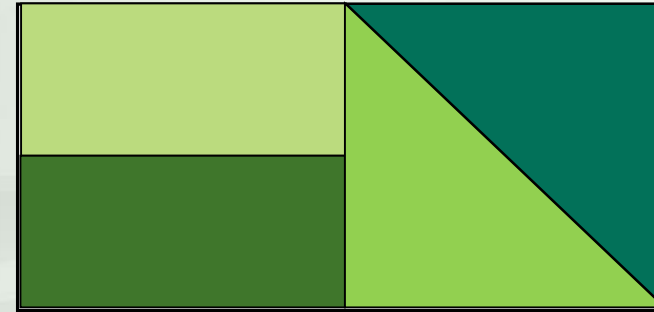
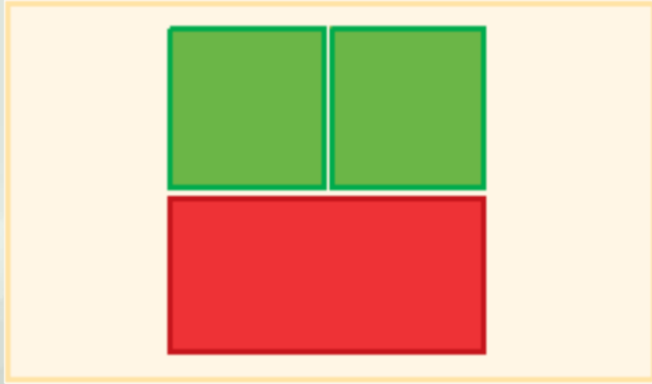
مفاهیم کلیدی در آموزش کسر:

۱- مفهوم تک جزء

- تک جزءها زمانی به دست می آیند که واحد یا کل را به بخش های مساوی قسمت می کنیم (تعبیر جزء-کل) یا یک واحد یا کل را به صورت عادلانه به گروه هایی تقسیم می کنیم (تعبیر خارج قسمت) که هریک از این بخش ها یا گروه ها، یک **تک جزء** است.



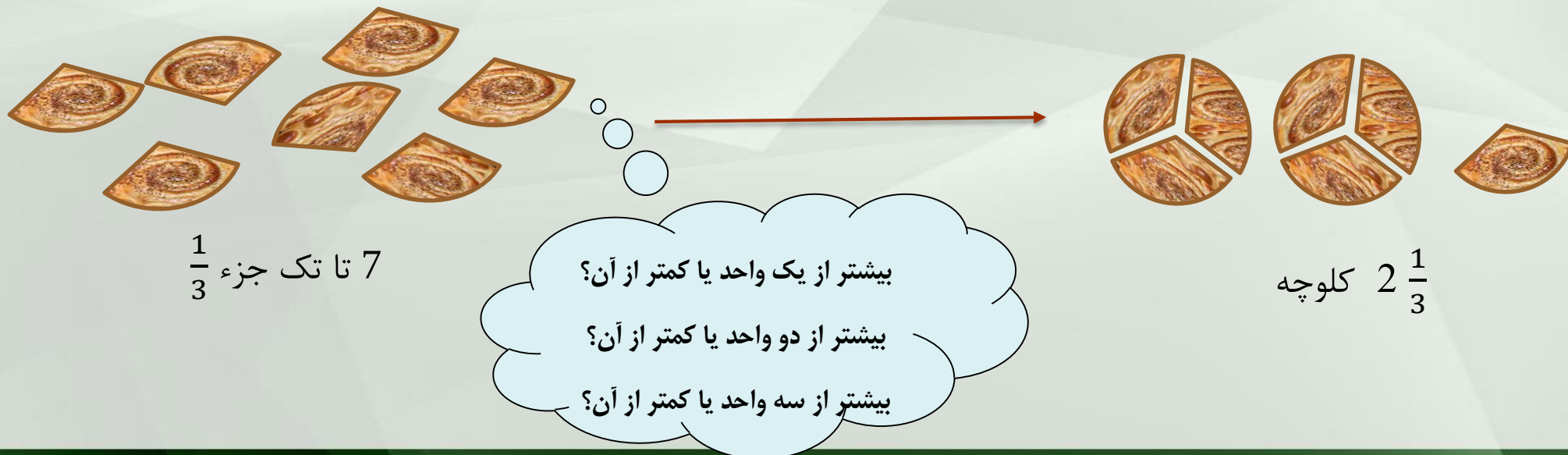
مشکلاتی در رابطه با مفهوم تک جزء



تک جزءهای $\frac{1}{6}$ یا $\frac{1}{2}$ ؟

تکرار تک جزءها

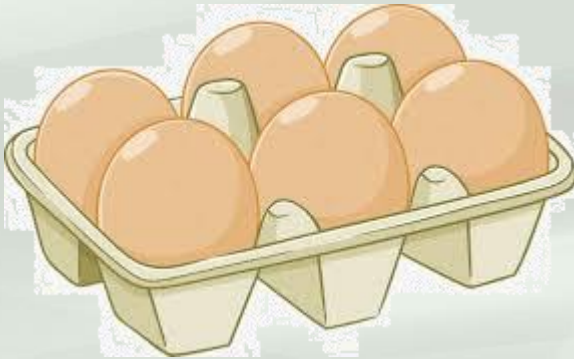
کسرهای بزرگتر از واحد



مفاهیم کلیدی در آموزش کسر:

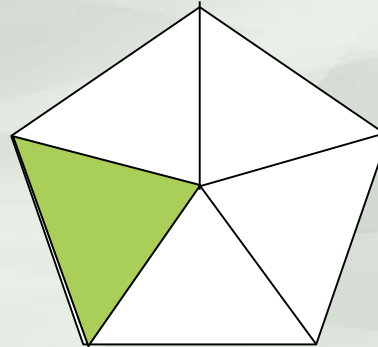
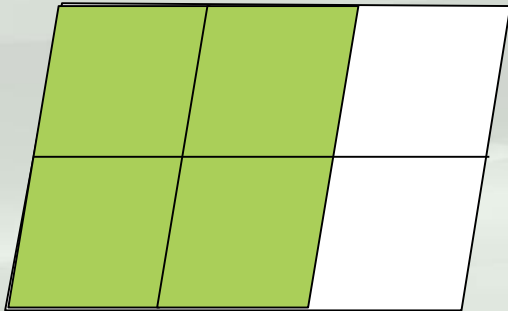
۲- مفهوم تقسیم برابر

دانش آموزان به دلایل مختلف، دارای انواع مشکلات در تقسیم بندی برابر برای کمیت های **گسسته** و **پیوسته** هستند.

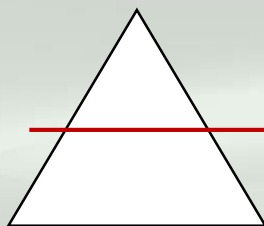


تقسیم برابر اشکال هندسی:

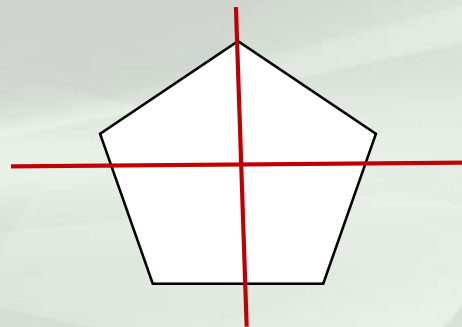
چرا شکل‌های هندسی مدل خوبی برای نمایش کسرها هستند؟



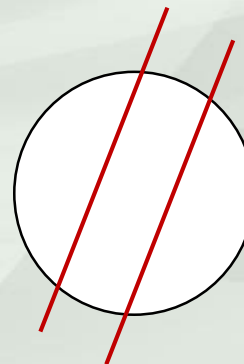
نتایج تحقیقات فرآیند تقسیم برابر توسط دانش آموزان:



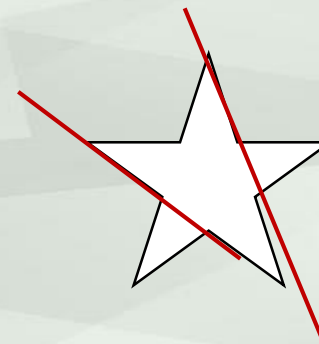
برش افقی



برش های عمود برهم



برش موازی



برش رأس‌ها

عوامل عمده ناتوانی و بی توجهی دانش آموزان به تقسیم برابر شکل های برابر

- عدم توجه کتاب های درسی به انجام کافی فرآیند تقسیم برابر توسط خود دانش آموز
- شناخت و دانش ناکافی از شکل های هندسی و ویژگی آنها.

۴- مانند نمونه جمله‌ها را با نوشتن عدد مناسب کامل کنید و نشان دهید چه بخشی از شکل رنگ شده است.



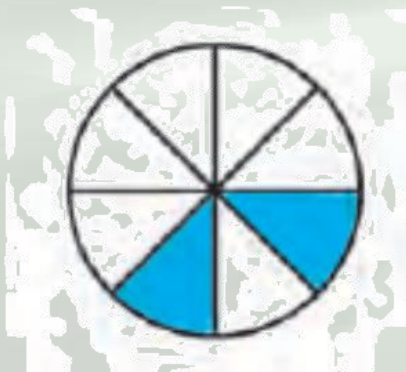
..... قسمت از قسمت



۶ قسمت از ۱۰ قسمت



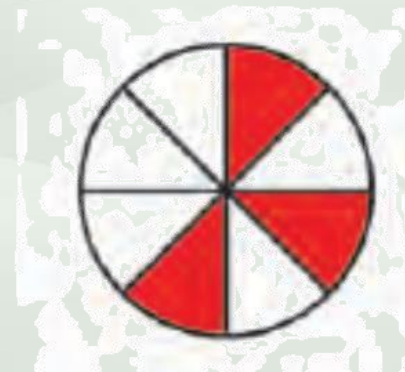
..... قسمت از قسمت



..... قسمت از قسمت



..... قسمت از قسمت

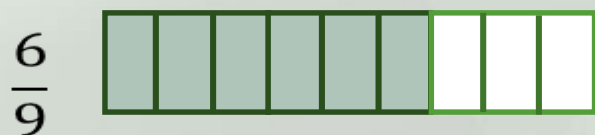
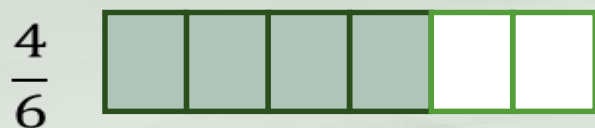


..... قسمت از قسمت

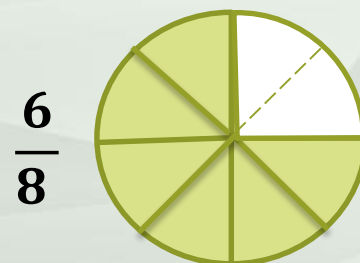
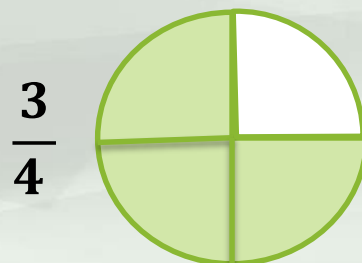
- کسره‌های برابر
- مقایسه کسرها
- جمع و تفریق کسرها
- ضرب و تقسیم کسرها

کسرهای برابر

فعالیت



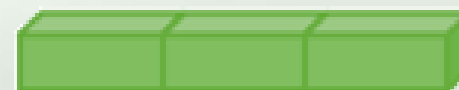
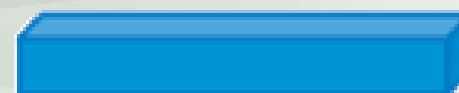
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$



$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$



کل (واحد)



$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = \text{آبی}$$

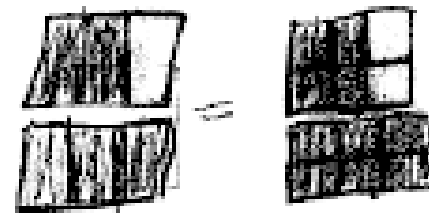
فعاليات:

$$\frac{5}{3} = \frac{6}{6} \quad , \quad \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{12} = \frac{\boxed{2}}{3}$$



$$\frac{5}{3} = \frac{\boxed{6}}{6}$$

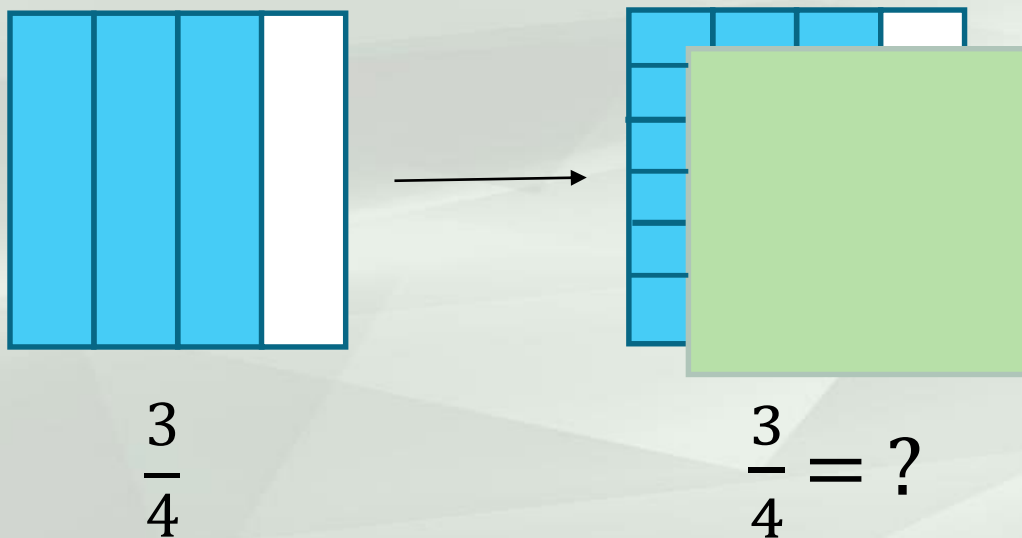


به سوی کشف الگوریتم کسرهای برابر

طرح یک مسئله:

به سوی کشف الگوریتم کسرهای برابر

چگونه می‌توان تعداد تک جزءها را شمرد بدون این که بتوان همه را دید؟



مقایسه کسرها:

مقایسه دو کسر با صورت ۱ با استفاده از مدل‌ها:

کسرهای $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{5}$ را با هم مقایسه کنید:

فعالیت

مقایسه کسرها:

مقایسه دو کسر دلخواه؛

استفاده از درک عددی:

دو کسر با مخرج یکسان

دو کسر با صورت یکسان

کمتر یا بیشتر از یکدوم

$$\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$$

نزدیکتر به یک یا یکدوم

$$\frac{9}{10}, \frac{3}{4}$$

استفاده از الگوریتم کسرهای برابر:

جمع (تفریق) کسرها:

۱ – تخمین حاصل عمل و درکی از بزرگی آن

۲ – توسعه روش‌های ابداعی

۳ – توسعه الگوریتم متداول

تخمین حاصل عمل و درکی از بزرگی آن

- استفاده از اعداد معیار:

چقدر به اعداد 0، $\frac{1}{2}$ و 1 (یا 2، 3، ...) نزدیکند؟

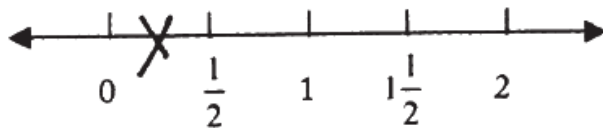
$$\frac{7}{8} + \frac{1}{10} = ?$$

- استفاده از اندازه نسبی تک جزءها:

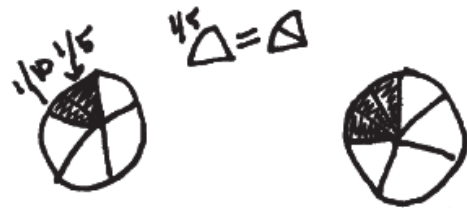
توسعه روش‌های ابداعی

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} =$$

Estimate first by putting an X on the number line.



Solve with Fraction Circles. Draw pictures of what you did with the circles below.

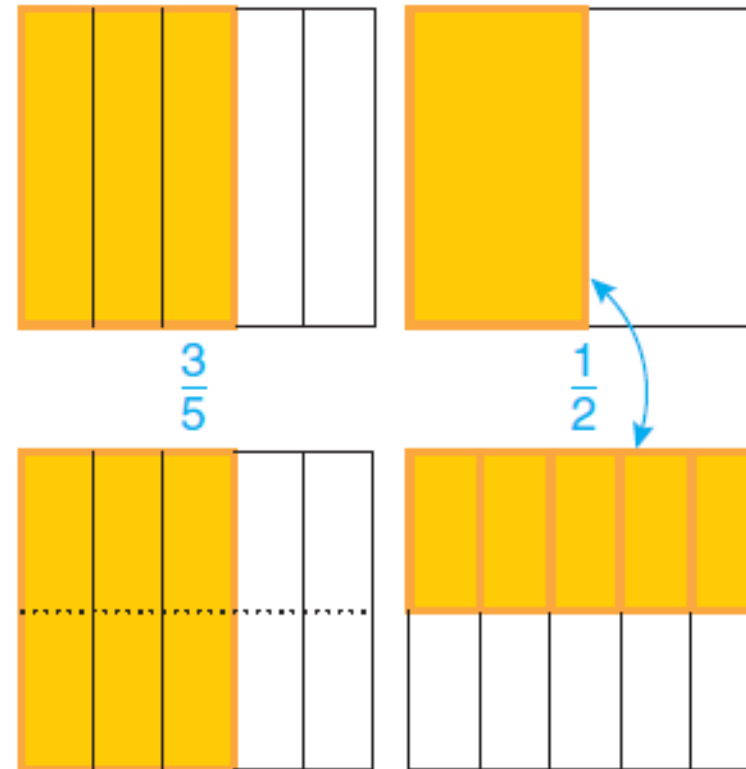


Record what you did with the circles with symbols.

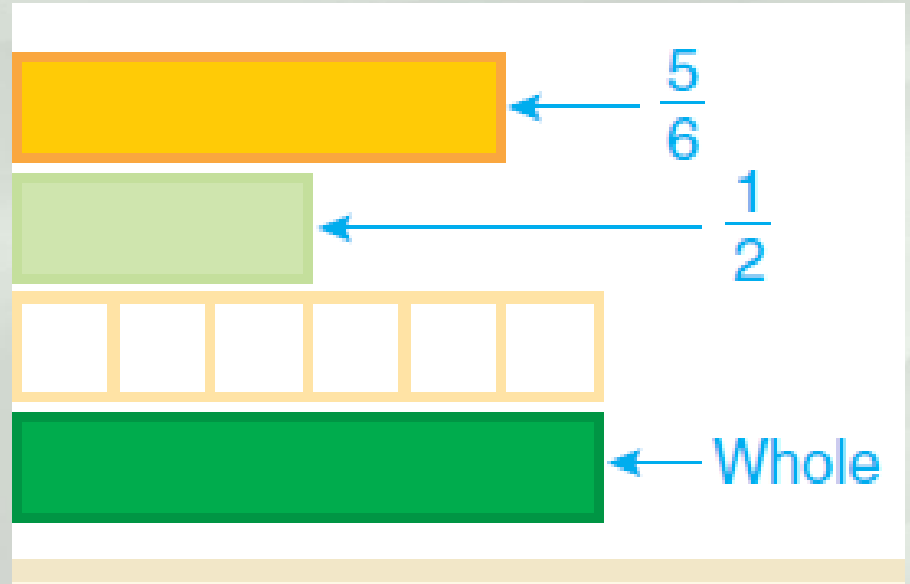
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

طرح یک مسئله:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{2}$$



$$\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$$



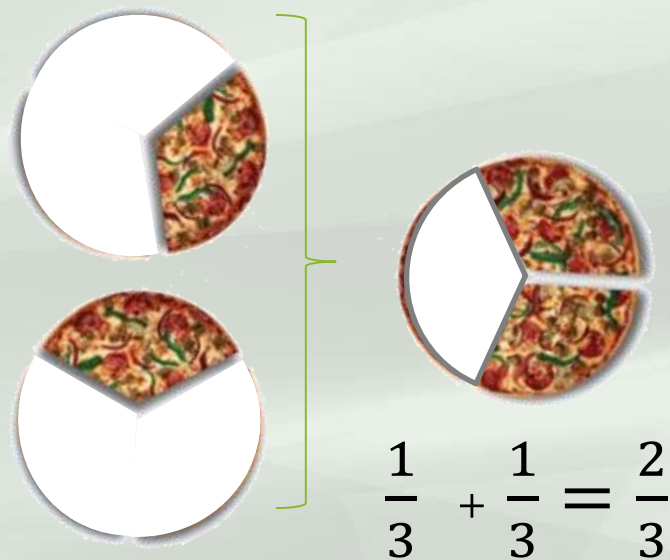
توسعه الگوریتم

- جمع و تفریق با مخرج‌های برابر

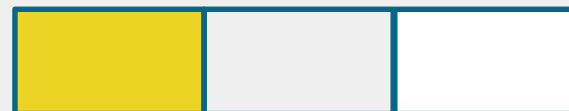
- جمع و تفریق با مخرج‌های نابرابر

ضرب کسرها:

$$2 \times \frac{1}{3} = ?$$



- $\frac{1}{3}$ واحد را مشخص می کنیم.



- آن را دو برابر کرده و



- مقدار بدست آمده را با واحد مقایسه می کنیم. این مقدار $\frac{2}{3}$ واحد را نشان می دهد.

مسئله کلامی: ؟

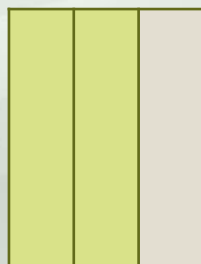
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = ?$$

چقدر از کل؟

کسری از مقدار اولیه:

مقدار اولیه:

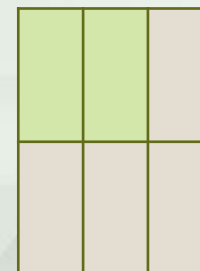
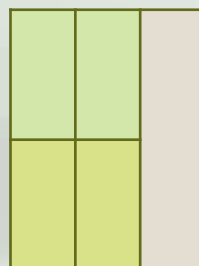
$\frac{2}{3}$ واحد



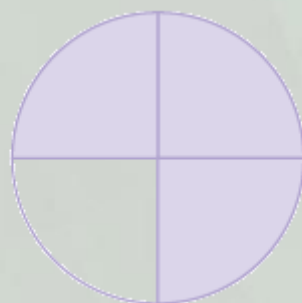
$\times \frac{1}{2}$



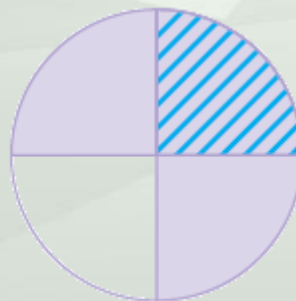
$\frac{1}{2}$ از $\frac{2}{3}$



$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\text{تعداد تک جزء های حاصل عمل}}{\text{تعداد کل تک جزء ها}} = \frac{\text{ضرب صورت ها}}{\text{ضرب مخرج ها}} = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$$



مقدار اولیه ؟

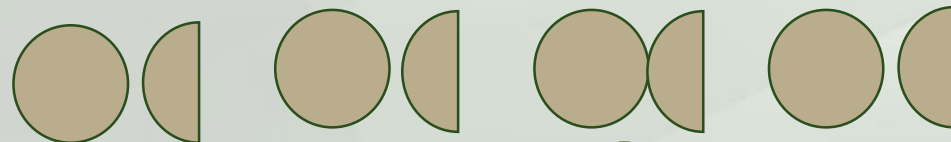
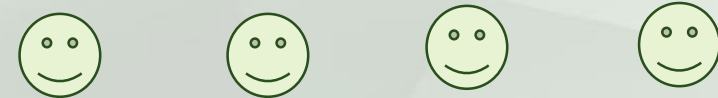
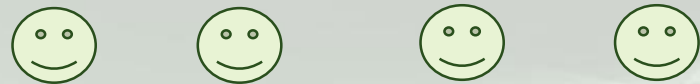


چه کسری از مقدار اولیه ؟

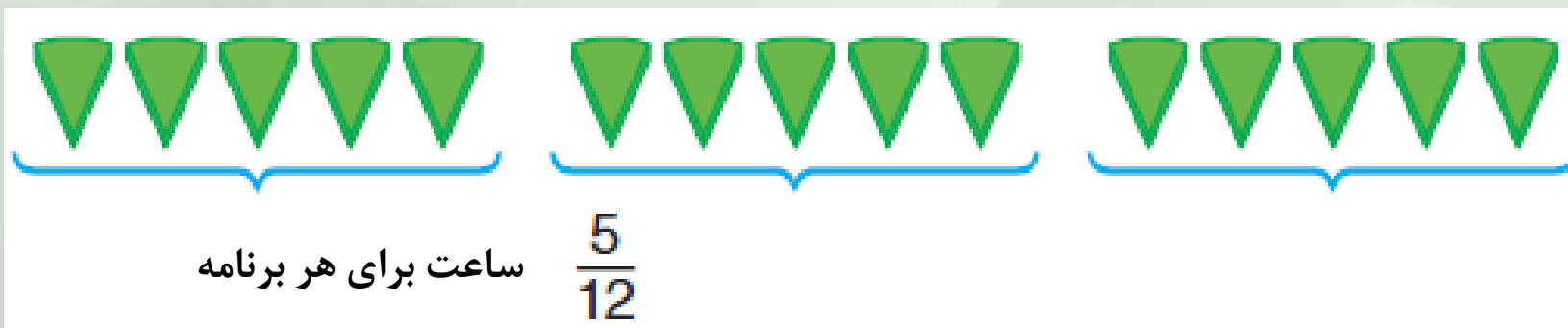
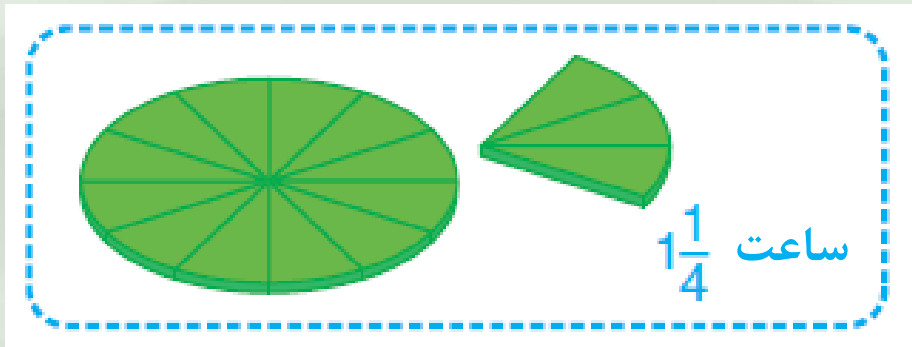
تقسیم کسرها:

تقسیم شراکتی:

$$6 \div 4 = ?$$



$1\frac{1}{4}$ ساعت برای انجام سه برنامه زمان داریم. اگر برای انجام هریک از سه برنامه، زمان یکسانی صرف شود،
انجام هر برنامه چقدر زمان می برد؟

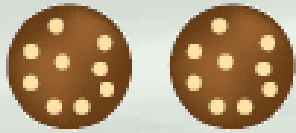


تقسیم کاهشی:

1.



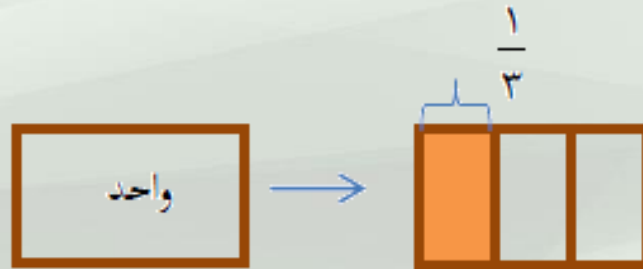
$$2 \div \frac{1}{2}$$



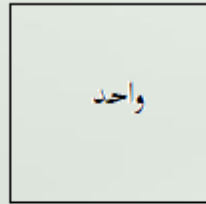
توسعه الگوریتم های متداول تقسیم کسرها:

- الگوریتم برابر کردن مخرج ها:

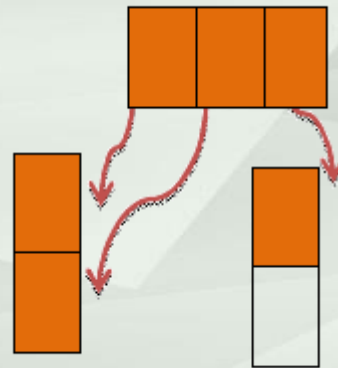
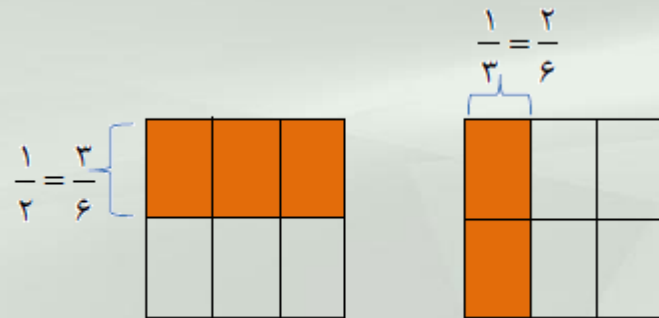
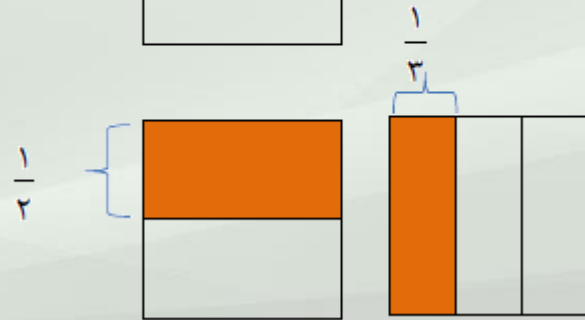
$$2 \div \frac{1}{3}$$



$$2 \div \frac{1}{3} = \frac{6}{3} \div \frac{1}{3} = 6$$

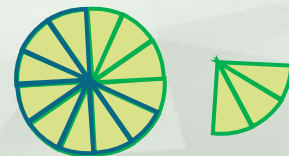
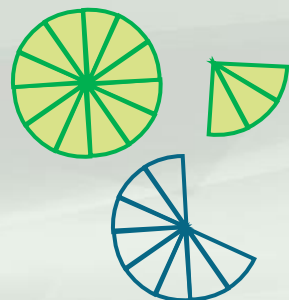
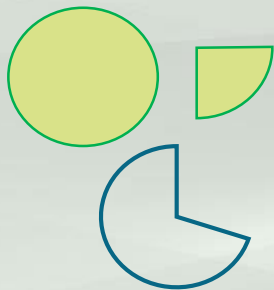


$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = ?$$



$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \div \frac{2}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

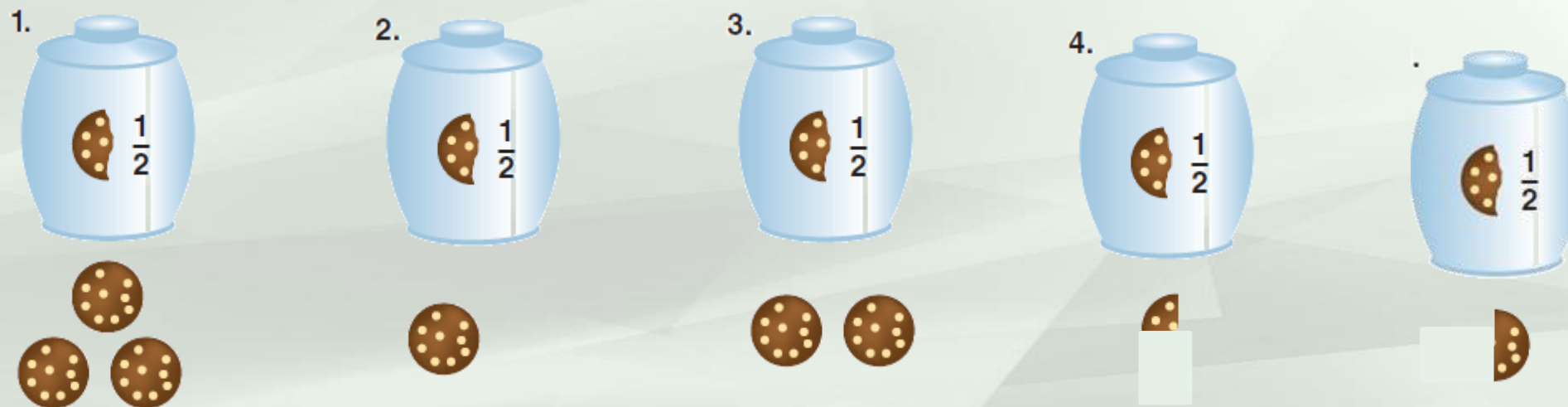
$$1\frac{1}{4} \div \frac{2}{3}$$



فعاليت

• الگوریتم ضرب در معکوس:

مرحله ۱



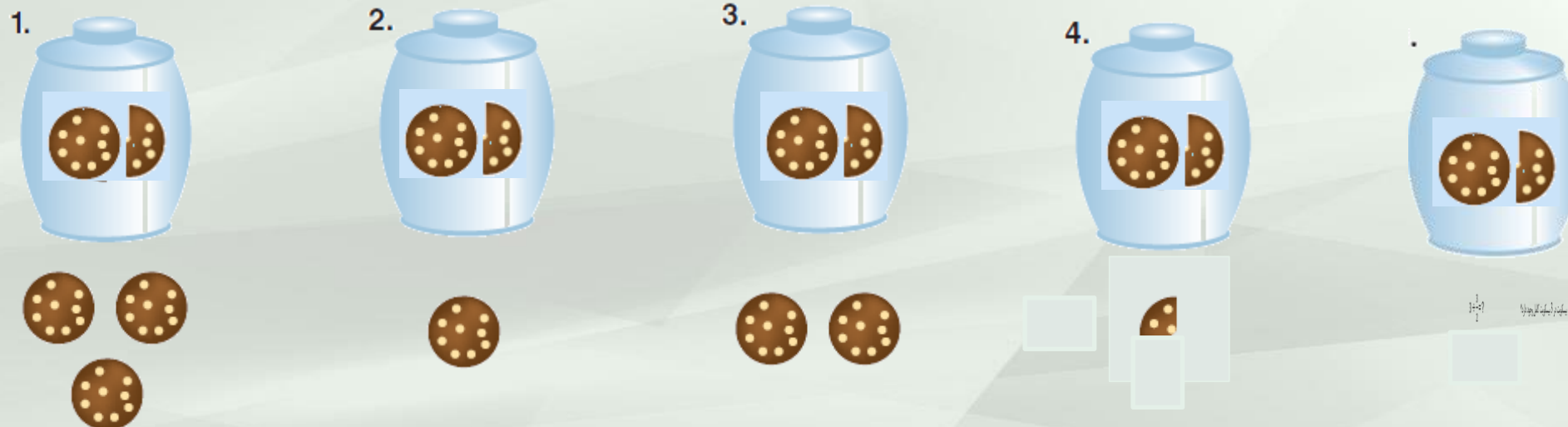
$$3 \div \frac{1}{2} = ?$$

۱- چند تا $\frac{1}{2}$ بیسکویت در 3 بیسکویت کامل وجود دارد؟

۲- چند تا $\frac{1}{2}$ بیسکویت در 1 بیسکویت کامل وجود دارد؟

.....

مرحله ۲



$$3 \div \frac{3}{2} = ?$$

۱- چند تا $\frac{3}{2}$ بیسکویت در 3 بیسکویت کامل وجود دارد؟

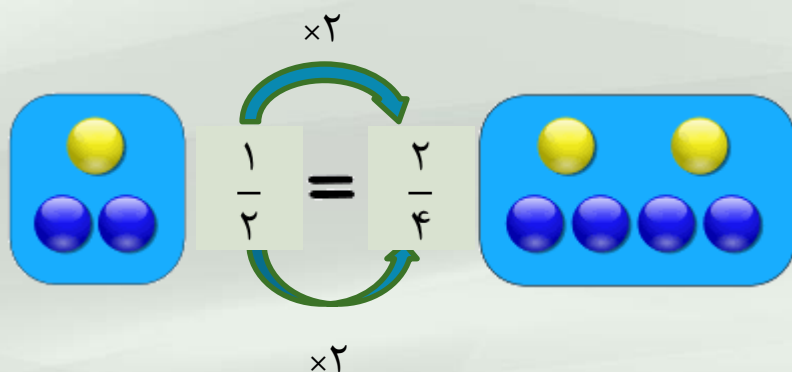
۲-

تفکر نسبیتی

تناسب:

هر دو نسبت برابر با هم یک تناسب تشکیل می دهند.

نسبت مهره های زرد به آبی:



$$\frac{4}{3} = \frac{28}{21} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{28}{21}$$

The diagram shows the simplification of the fraction $\frac{4}{3}$ to $\frac{28}{21}$. A pink arrow points from $\frac{4}{3}$ to $\frac{28}{21}$. Above the arrow is a curved pink arrow labeled $\times 7$, and below it is another curved pink arrow labeled $\times 7$, indicating that both the numerator and denominator are multiplied by 7 to reach the simplified form.



ساختار جمعی و ضربی:

- سمیه و زهره به سمت مدرسه با یک سرعت ولی با یک فاصله زمانی در حرکتند. اول سمیه شروع به حرکت می کند. زمانی که سمیه ۶ متر از مسیر را طی می کند، زهره ۲ متر طی کرده. اگر سمیه ۱۲ متر طی کرده باشد، زهره چه مسافتی طی کرده؟
- سپیده و بهناز هر یک مشغول درست کردن کیک با یک دستور آشپزی هستند. سپیده ۶ تخم مرغ و بهناز ۴ تخم مرغ در مخلوط کیک خود استفاده می کنند. اگر سپیده ۳ لیوان آرد استفاده کند، بهناز چند لیوان آرد باید در مخلوط کیک خود استفاده کند؟

حوزه مفهومی ساختار ضربی^۱ (ورنیو ۱۹۸۳، ۱۹۸۸)

حوزه مفهومی ساختار ضربی، به همه موقعیت فیزیکی گفته می‌شود که تعبیرهایی از مسئله‌های تناسب ساده یا چندگانه است که حل آن‌ها مستلزم به کارگیری ضرب و یا تقسیم است.

1-Conceptual field of multiplicative structures

مسئله با ساختار ضربی:

سه مارماهی A, B, C به ترتیب به طول های ۵، ۱۰، ۱۵ سانتیمتر هستند که به نسبت قدشان غذا می خورند.

* اگر A یک تکه گوشت بخورد، به B و C چقدر خواهد رسید؟
اگر به B چهار تکه گوشت برسد، به هر یک از A, C چند تکه خواهد رسید؟
اگر به C، ۹ تکه برسد، به A و B چند تکه می رسد؟

مرحله ۱ - ۱ (۵-۶ ساله) : قضاوت کیفی . بیشتر یا کمتر.

مرحله ۲ - (۷ ساله) : قضاوت کمی با اختلاف یک واحد.

مرحله ۳ - (۸ ساله) : قضاوت کمی با اختلاف ثابت k .

مرحله ۴ - (۹ سال به بالا) : قضاوت کمی ، شروع استدلال ضربی .

تحقیقات پیاژه و همکارانش

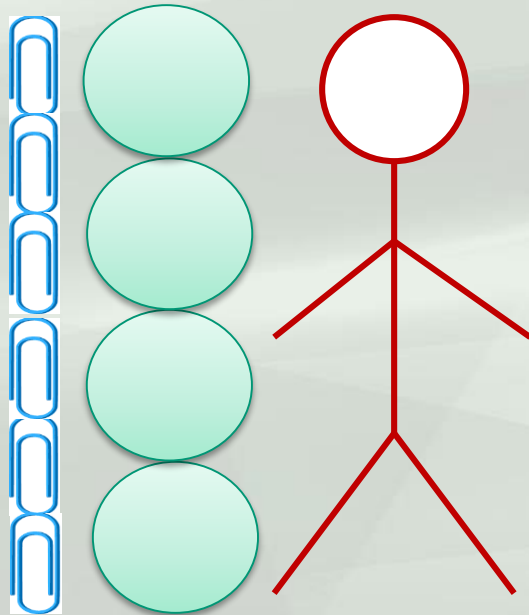
داده های تجربی در تحقیقات پیاژه و همکارانش نشان داد که برای استقرار تدریجی استدلال نسبیتی (ساختار ضربی) باید از مراحل پیش عملیاتی، عملیاتی و صوری (انتزاعی) عبور کرد. از نظر پیاژه، مفهوم تناسب یک مفهوم منطقی-ریاضی است که در وهله اول نیاز به یک فهم منطقی از تناسب و سپس نیاز به یک تخمین از جنبه های متریک آن دارد و بنابراین برای رسیدن به تسلط کافی برای حل مسائل نسبیتی باید تا سن ۱۲ تا ۱۴ سال صبر کرد.

البته اگر مقادیر عددی صحیح و کوچک باشند و تناسب مورد بحث ساده باشد، آن گاه دانش آموزان از مرحله عملیاتی شهودی به بعد نیز قادر به پاسخ گویی خواهند بود.

در سالهای بین ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰، مجموعه ای از تحقیقات در رد و یا قبول مدل پیاژه مرتبط با نظریه رشد شناختی مرحله ای ارائه شدند. برخی تاکید بر موفقیت زود رس (از ۸ تا ۱۰ سالگی) و برخی بر شکست دیر هنگام (۱۵ سالگی) داشتند.

مسئله: آقای بلند و آقای کوتاه

قد آقای کوتاه بوسیله گیره و ژتون اندازه گیری شده است.



قد آقای کوتاه ۶ گیره یا ۴ ژتون است.

قد دوستش آقای بلند ۶ ژتون است.

چند تا گیره برای اندازه گیری قد آقای بلند نیاز داریم؟

طبقه بندی جواب مسائل تناسبی برحسب عملکرد دانش آموزان (کارپلاس ۱۹۷۲-۱۹۸۰)

- استفاده نا کامل یا اشتباه از داده های مسئله
 - استفاده از یک روش جمعی به جای روش های ضربی (به معنای کم کردن ثابت ها)
 - استفاده از روش های واسطه ای (جمع تکراری، اشکال و یا شامل استفاده جزئی از تناسب)
 - استفاده از روش هایی که به طور صریح اشاره به تساوی دو نسبت دارد.
- او متذکر شد که روش های آخرین طبقه از سن ۱۲ (برای یک سطح متوسط کلاس) به بعد به طور فزاینده ای مورد استفاده قرار می گیرد.

ساختار رو به رو سه نوع اساسی مسئله را بنا به انتخاب مجهول، مشخص می کند:

ضرب: پیدا کردن $f(x)$

تقسیم نوع اول (شراکتی): پیدا کردن $f(1)$ (عدد اصلی مجموعه)

تقسیم نوع دوم (کاهشی): پیدا کردن x (تعداد دسته)

M_1	M_2
1	$f(1)$
x	$f(x)$

مثال:

۱- اگر روی هر نیمکت ۳ دانش آموز نشسته باشد، روی ۲ نیمکت چند دانش آموز نشسته؟

1	3
2	?

۲- اگر روی ۲ نیمکت ۶ دانش آموز نشسته باشد، روی هر نیمکت چند نفر نشسته؟

1	?
2	6

۳- اگر هر ۳ دانش آموز روی ۱ نیمکت بنشینند، ۶ دانش آموز احتیاج به چند نیمکت دارند؟

1	3
?	6

تعداد دانش آموز	تعداد نیمکت
$f(1)$	1
$f(x)$	x

استفاده از خواص یکرختی تابع (بدون استفاده از فرمول) توسط دانش آموزان ۱۰ تا ۱۲ ساله برای حل مسئله تناسب ساده:

تعداد مداد	قیمت
4	6
10	?

$$f(kx) = k f(x) \quad (a)$$

$$f(2.5 \times 4) = 2.5 \times f(4)$$

$$x = 2.5 \times 6$$

$$f(x+x+x') = f(x) + f(x) + f(x') \quad (b)$$

$$f(4+4+2) = f(4) + f(4) + f(2)$$

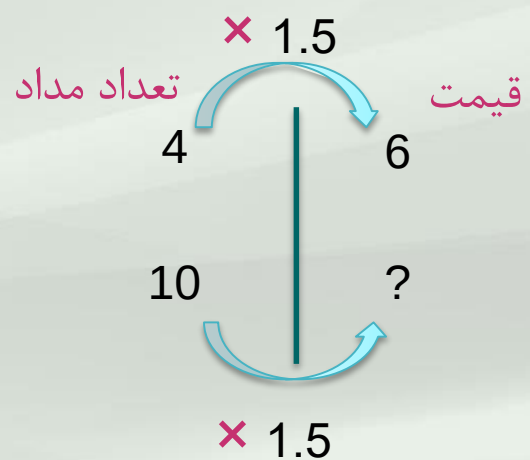
$$x = 6 + 6 + 3 = 15$$

$$f(ax+bx) = af(x) + bf(x) \quad (c)$$

$$f(2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4) = 2 \times f(4) + \frac{1}{2} \times f(4)$$

$$x = 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 = 12 + 3 = 15$$





$$10 \text{ (مداد)} \times 1.5 \text{ (مداد/تومان)} = 15 \text{ (تومان)}$$

1. چمن آرا، سپیده؛ خسروشاهی، لیلا؛ نقیبی، مهدخت (1398). آنچه درباره کسر باید بدانیم: دانش افزایشی موضوعی برای معلم. سازمان پژوهش و برنامه ریزی درسی، وزارت آموزش و پرورش. انتشارات مدرسه.
2. چمن آرا، سپیده؛ خسروشاهی، لیلا؛ نقیبی، مهدخت (1398). آنچه درباره تدریس کسر باید بدانیم: دانش افزایشی مهارت تدریس برای معلم. سازمان پژوهش و برنامه ریزی درسی، وزارت آموزش و پرورش. انتشارات مدرسه.
3. نقیبی مهدخت (۱۳۹۶). بدفهمی‌ها و مشکلات رایج دانش آموزان در فرآیند تقسیم برابر شکل‌های هندسی. اولین همایش دانش موضوعی تربیتی، آموزش ریاضی ابتدایی دانشگاه فرهنگیان، سمنان.
4. Cramer, K., Monson, D., Whitney, S. (2010). "Dividing Fractions and Problem Solving" *Mathematics Teaching in the Middle School*, v15 n6 p338-346
5. Grows, D. A. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. NC: MACMILLAN.
6. Kieren, T. (1980). "The rational number construct - Its elements and mechanisms". In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*, p 125-149. Columbus: ERIC, SMEAC
7. Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development In]. Hiebert & M. Behr (Eds.), *umberconcepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
8. Lester, F. K., Jr., (Ed.). (2007). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* . Charlotte, NC: Information Age.
9. Nancy K. Mack (2001). "Building on Informal Knowledge through Instruction in a Complex Content Domain: Partitioning, Units, and Understanding Multiplication of Fractions" · *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 32. n 3, p 277.
10. Note de cours de Didactique des Mathématiques , Roberta Mura, Université Laval.
11. Pirie, S., Kieren, T. (1994). "Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterize It and How Can We Represent It?", *Educational Studies in Mathematics*, v26 n2-3 p165-90.
12. Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2013). (8th Edition). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, Boston: Pearson.