



کارگاه بهسازی و توانمندسازی مدرسان آموزش ریاضی کارشناسی ابتدایی
دانشگاه فرهنگیان

بخش ۱: ساختار مفهومی اعداد طبیعی (حسابی) – عملیات

مهدخت نقیبی

کاربرد اعداد طبیعی:

جنبه کاردینالی، «چقدر؟»

اندازه گیری کمیت های گسسته (شمارش)

اندازه گیری کمیت های پیوسته

جنبه ترتیبی، «کدامیک؟»

جنبه اسمی ؟

یکی از مهم ترین کاربردهای اعداد طبیعی، جنبه کاردینالی آن است.

شمارش

یادآوری:

۱- تفاوت عدد و رقم

مفهوم **عدد**، یک ایده انتزاعی است که برای بیان و نمایش آن از **واژه‌ها** و یا **نمادهای عددی** به صورت گفتاری و یا نوشتاری استفاده می‌کنیم:

هفت ، 7 ، ۷ ، seven ، VII ، $(۱۳)_۴$.

رقم یک نماد عددی است که فقط شامل یک عنصر است.

نمونه هایی از بدفهمی ها در به کار گیری غلط از مفهوم عدد و نماد عددی:

استفاده نادرست از عدد به جای نماد عددی:

قانون بیان شده توسط برخی معلمین:

« برای ضرب عدد در ده کافی است یک صفر به انتهای عدد اضافه کنیم »

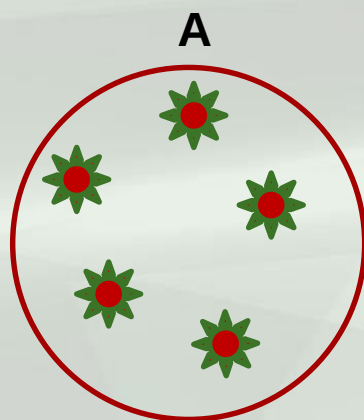
$$۵۳ \times ۱۰ = ۵۳ + ۰ = ۵۳!!!$$

استفاده نادرست از نماد عددی به جای عدد:

$$۲۳۴ - ۲۰ = ۳۴$$

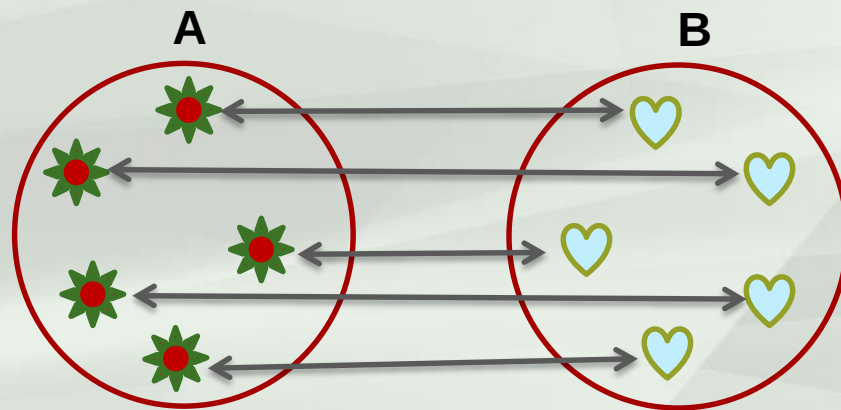
عدد اصلی یا کاردینال :

عدد اصلی یا کاردینال یک مجموعه متناهی، تعداد عضو های آن مجموعه است.



$$n(A) = 5$$

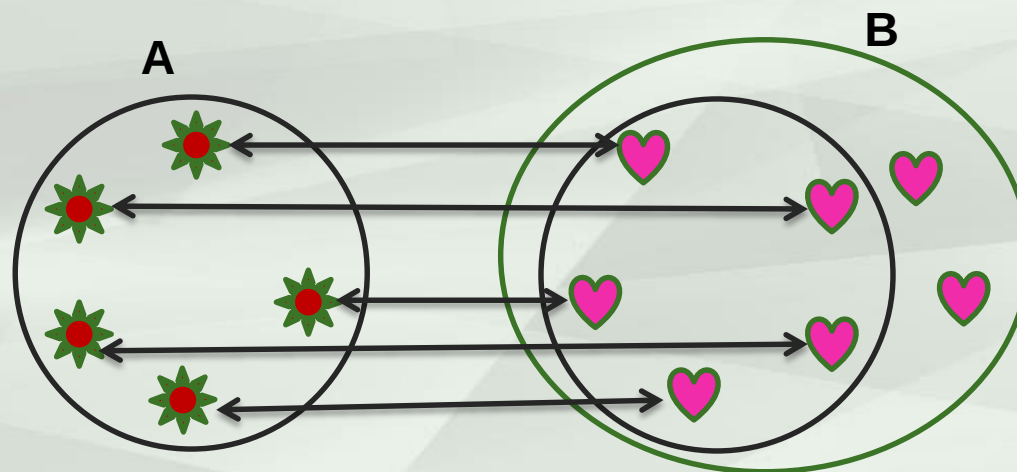
تناظر یک به یک - رابطه تساوی:



$$A \sim B$$

$$n(A) = n(B)$$

تناظر یک به یک - روابط ترتیب:



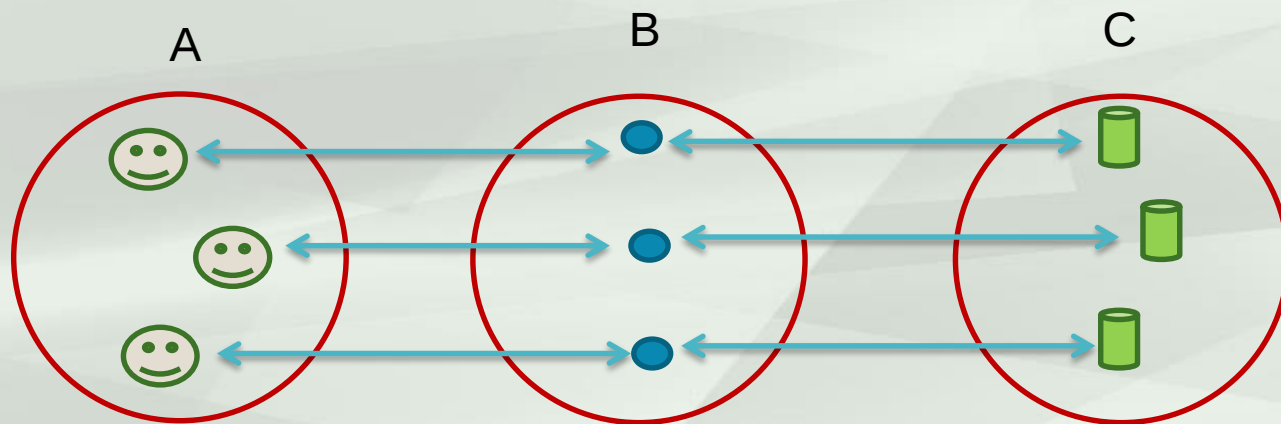
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B)$$

مشکلاتی در ارتباط با تعیین عدد اصلی

۱- به جهت برقراری ارتباط با دیگران، چگونه می توان عدد اصلی یک مجموعه متناهی را تعیین کرد (به خاطر آورد و یا بازتولید کرد) ، در حالیکه مجموعه اصلی در دسترس نباشد؟ (مثلا بیرون آمدن از کلاس و خریدن بطری کوچک آب میوه برای هر یک از دانش آموزان کلاس)

۲- چگونه می توان عدد اصلی دو مجموعه را با هم مقایسه کرد؟ (مثلا تعداد نیمکت ها و تعداد دانش آموزان یک کلاس؟)

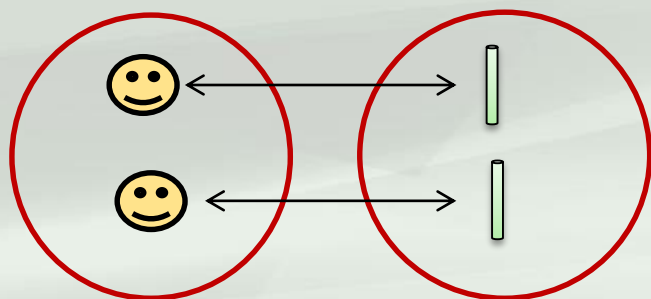
خاصیت تراییی تساوی در یک تناظر غیر مستقیم



$$n(A) = n(B) , n(B) = n(C) \Rightarrow n(A) = n(C)$$

روشهای تعیین و ثبت عدد اصلی یک مجموعه به کمک تناظر یک به یک :

۱- مشاهده و درک مستقیم

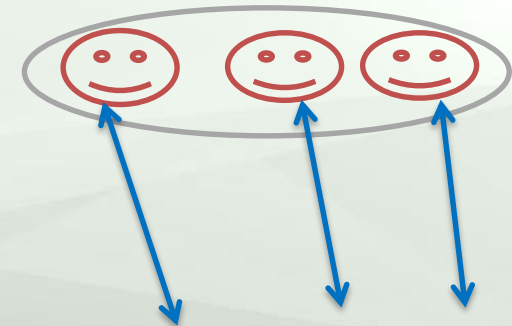


۲- نشانه گذاری یا نماد گذاری

۳- شمارش واژه‌ای یا نمادی

۴- شمارش عددی

۳- شمارش واژه‌های یا نمادی:



(باز، باران، باترانه ، باگوه‌رهای ، فراوان، می‌خورد، بر بام، خانه،.....)



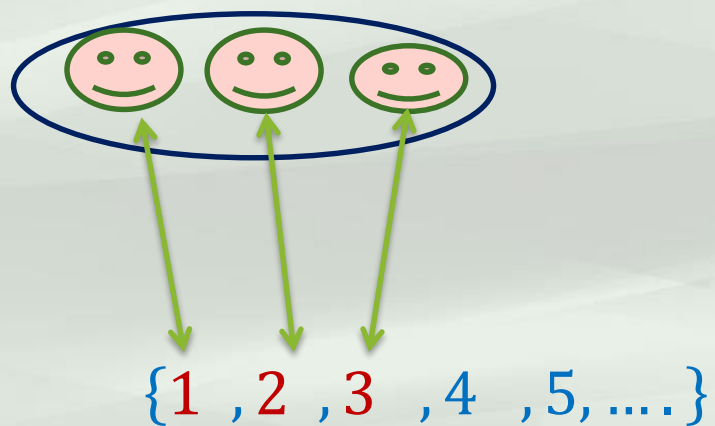
(یک ، دو ، سه ، چهار، پنج ، شش، هفت، هشت، نه ، ده، یازده،)

فهرست کلمات (واژگان) در این شمارش باید **قابل یادگیری** بوده و ویژگی های زیر در آن رعایت شود:

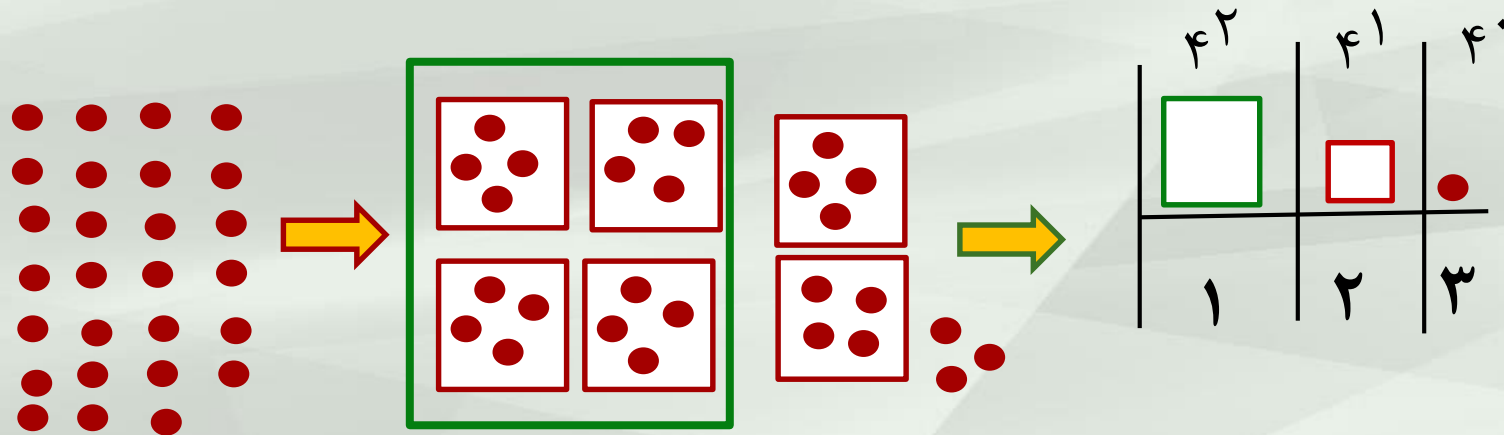
- ترتیب اشیائی که می خواهیم بشماریم اهمیتی ندارد.
 - کلمات و یا نمادهای فهرست باید **غیر تکراری** بوده و همیشه با یک ترتیب خاص استفاده شوند.
 - اشیاء شمرده شده باید در یک تناظر یک به یک با یک قسمت اولیه از این فهرست باشند.
 - کلمه و یا نماد استفاده شده برای آخرین شیء ، نشان دهنده عدد اصلی مجموعه از تمامی اشیاء شمرده شده است.
- چهار قانون گفته شده برای هر مجموعه از اشیاء می تواند مورد استفاده قرار بگیرد.
- (همگن، ناهمگن، ملموس یا انتزاعی و ..)

۴- شمارش عددی:

همان سیستم شمارش واژه‌ای است که واژه‌های آن، اعداد هستند.



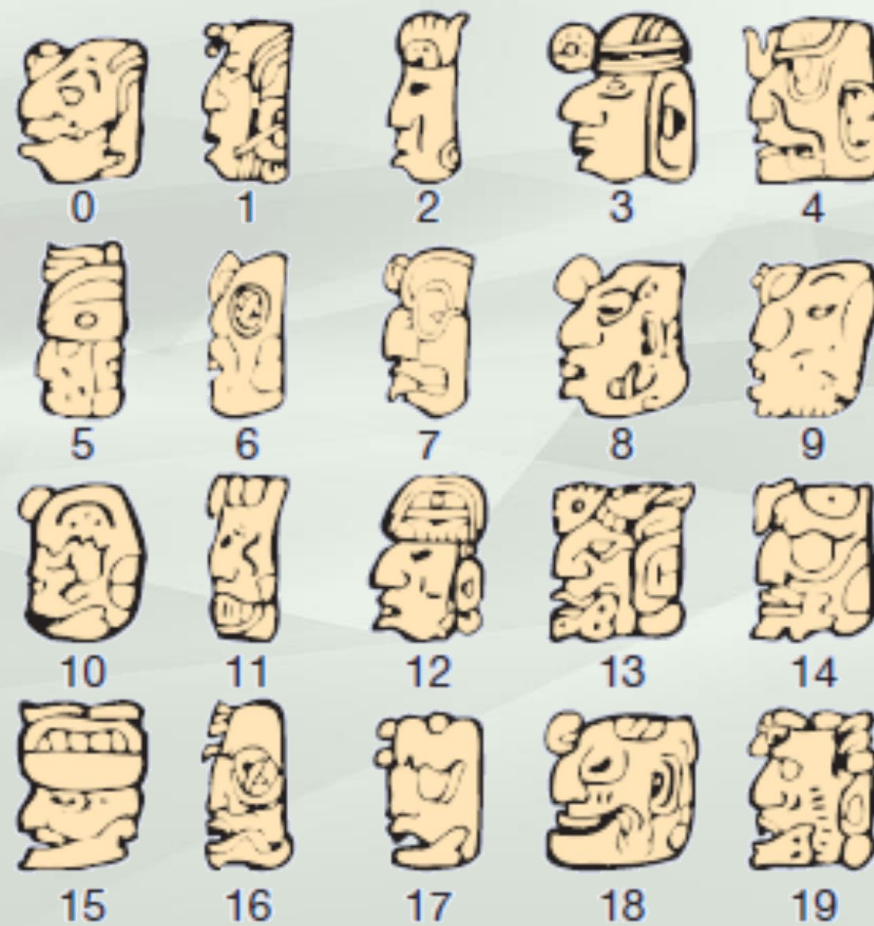
سیستم شمارش عددی، بر پایه ایده دسته بندی های متوالی بنا شده است.
 کافی است اعداد اصلی کوچکتر از پایه سیستم، شمارش شوند. برای اعداد بزرگتر، روند دسته بندی به طور نامتناهی ادامه پیدا می کند.



$$(27)_{10} = (123)_4$$

$$(123)_4 = (1 \times 4^2) + (2 \times 4^1) + 3 = 27$$

نمایش هیروگلیف توسط مایا ها برای ثبت اعداد ۰ تا ۱۹



نمادها در سیستم عددی مبنای ۱۰ مصری‌های باستان (۳۴۰۰ سال قبل از میلاد)

	∩	🌀	🌸	☞	🐟	🧑
Staff (one)	Heelbone (ten)	Scroll (hundred)	Lotus flower (thousand)	Pointing finger (ten thousand)	Fish (hundred thousand)	Astonished man (million)

مثال:

🌀🌀🌀∩∩|

321

🌸∩∩∩|||

1034

🧑🐟☞☞∩|||

1,120,013

🌀🌀🌀🌀🌀🌀🌀∩∩∩∩||| + 🌀🌀🌀🌀🌀🌀🌀∩∩∩∩∩∩||| = 🌸🌀🌀🌀∩∩∩|||

$$764 + 598 = 1362$$

نمادها در سیستم رومی ها (۵۰۰ سال قبل از میلاد تا ۱۰۰ سال پس از میلاد)

ROMAN NUMERAL	VALUE
---------------	-------

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

CCLXXXI

281

ROMAN NUMERAL	VALUE
---------------	-------

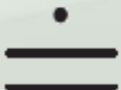
IV	4
IX	9
XL	40
XC	90
CD	400
CM	900

MCMXLIV

M CM XL IV,
1000 + 900 + 40 + 4.

نمادها در سیستم عددی مبنای ۲۰ توسط مایاها

• — 
one five zero

    
Six Eleven Eight Nineteen Twenty

		•	8000 (=20 ³)
	• •	• •	400 (=20 ²)
•		• • •	20
	•	•	1
20	806	10871	

20 ³	20 ²	20 ¹	20 ⁰
8000	400	20	1
•	• •	• • •	•
1×8000	7×400	3×20	11×1

کتاب ریاضی پایه اول دبستان

تناظر یک به یک بین دو مجموعه

دسته‌هایی را که تعداد شکل‌هایشان مثل هم است، با خط کش به هم وصل کن.



با میره دکه و با اشیا مشابه دسته‌های ۱ تا ۵ را بسازید و از دانش‌آموزان بخواهید با شمردن سریع تعداد آن‌ها را بگویند.
از فرزند خود بخواهید در موقعیت‌های زندگی روزمره از شمارش استفاده کند و تعداد را سریع بگوید.



کتاب ریاضی پایه اول دبستان

بشمار و رنگ کن

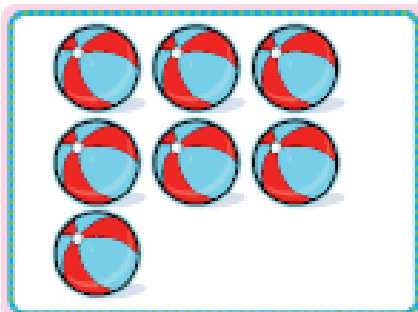
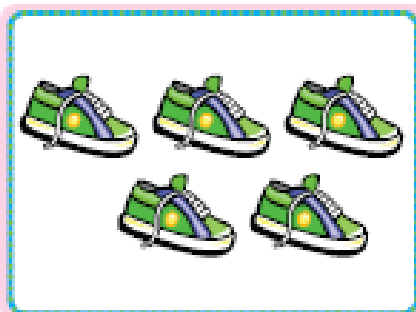
به تعداد شکل های سمت چپ از شکل های سمت راست رنگ کن.
چون جدول های زیر را با رنگ مناسب کامل کن.

دانش آموزان برای پیدا کردن تعداد شکل هایی که باید رنگ شود بدون شمردن و با برقراری تناظر شکل ها را رنگ کنند. در مربع های شگفت انگیز در هر سطر و ستون باید هر سه رنگ به کار رفته باشد. در زندگی روزمره موارد زیادی وجود دارد که بدون شمردن می توان دسته های با تعداد مساوی را پیدا کرد. برای مثال کنار هر فاشی یک چنگال است.

تناظر یک به یک بین یک مجموعه و زیرمجموعه ای از مجموعه دوم

مثل نمونه از علامت کمتر - بیشتر (<) یا مساوی (=) استفاده کن.

بشمار و
بنویس



۵

<

۷

عملیات – جمع و تفریق (اساسی نوع اول)

عملیات – جمع و تفریق

- مراحل کسب مهارت‌های محاسبات جمع و تفریق
- انواع شمارش در جمع و تفریق
- تعبیرهای جمع و تفریق
- بازنمایی‌های مختلف برای جمع و تفریق
- خواص جمع و تفریق

مراحل کسب مهارت‌های محاسبات جمع و تفریق اعداد کوچک :

(کارپنتر و همکاران ۱۹۸۴ نقل شده در شیخیان ۱۳۹۱)

- **مدل سازی مستقیم:**

مقادیر داده شده در یک مسئله جمع و تفریق را به صورت فیزیکی نمایش می‌دهد، سپس مقادیر را مشخص کرده و عمل مربوطه را انجام می‌دهد و در آخر مجموعه نتیجه را می‌شمارد.

- **راهبردهای شمارش:**

پاسخ مسئله را با تمرکز بر شمارش پیدا می‌کند. از چوب‌خط و انگشتان دست و .. برای دنبال کردن شمارش استفاده می‌کند.

- **حقایق عددی:**

پاسخ مسئله را با استفاده از حقایق عددی می‌یابد. حقایق عددی در حقیقت روابط شناخته شده بین اعداد است که پس از یادگیری معنا دار، بر اثر تکرار، تبدیل به دانسته‌های بدیهی می‌شود.

انواع شمردن در جمع و تفریق (Carpenter 1984)

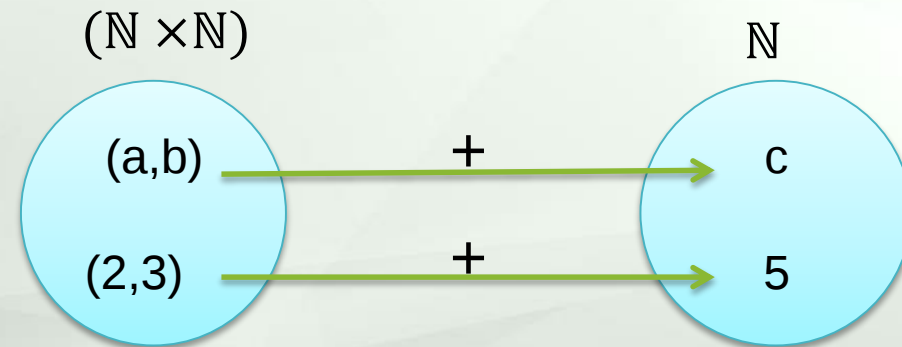
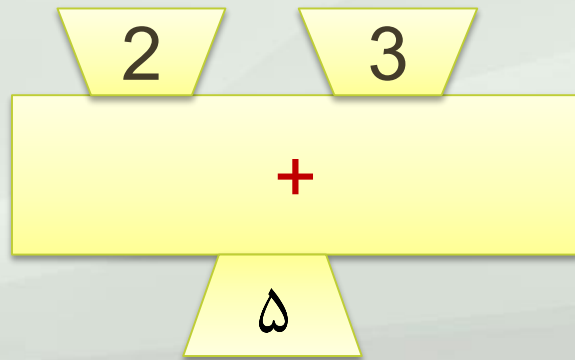
در جمع (روی هم گذاشتن)

- شمارش همه
- شمارش در ادامه
- شمارش از بزرگ‌تر

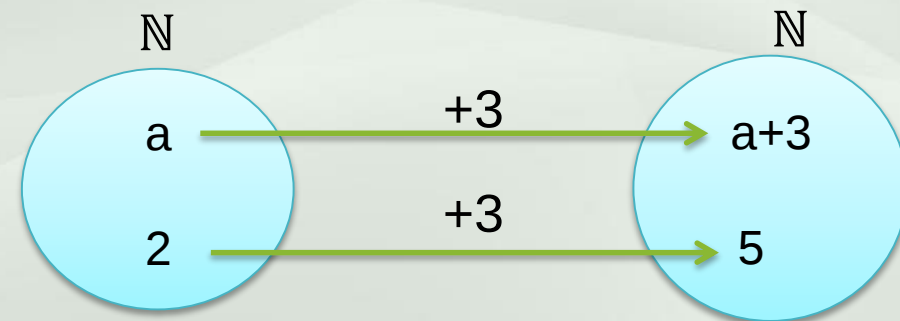
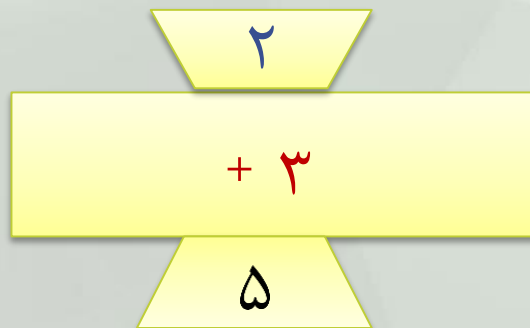
در تفریق (برداشتن)

- شمارش رو به پایین
- شمارش رو به بالا

جمع و تفریق هر کدام یک عمل دوتایی هستند:



اما می توانند به عنوان عملگر هم در نظر گرفته شوند:



تعبیر یک عدد در یک عبارت جمع و یا تفریق (ورنیو¹ 1991)

- می تواند بیانگر یک **عدد اصلی** یا یک **اندازه** باشد.

مثال: من ۳ توپ دارم، یک طناب ۳ متر است، هوا ۳ درجه است.
این مثال ها به عدد ۳ اشاره می کنند.

- می تواند بیانگر یک **رابطه** یا یک **تبدیل** بین عددهای اصلی یا اندازه ها باشد. مثلاً:

مریم ۳ توپ بیشتر از علی دارد، کرج ۳ درجه سردتر از تهران است.
این مثال ها به $+۳$ و -۳ اشاره می کنند.

بنا به این که عدد ها در عبارات جمع یا تفریق چه نقشی داشته باشند، موقعیت یا تعبیرهای مختلفی برای جمع و تفریق بوجود می آید.

تعبیرهای متفاوت مفهوم جمع :

- **ترکیب :** ترکیب یا اجتماع دو مجموعه به منظور تشکیل یک کل. دو عدد اصلی یا دو اندازه با هم ترکیب می‌شوند تا یک عدد اصلی یا اندازه سوم را نتیجه دهند.

مثال: علی ۲ توپ دارد، زهرا ۳ توپ، روی هم ۵ توپ دارند.

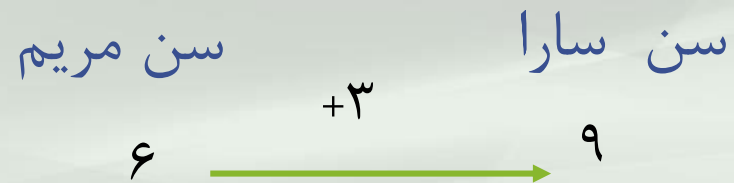
- **افزایش :** افزودن عناصری به مجموعه داده شده به منظور بزرگتر کردن آن مجموعه.

مثال: زهرا سه گردو دارد، مادرش یک گردوی دیگر به او می‌دهد. زهرا روی هم چهار گردو دارد.

- رابطه (مقایسه):

یک رابطه، دو اندازه یا دو عدد اصلی را به هم مربوط می کند.

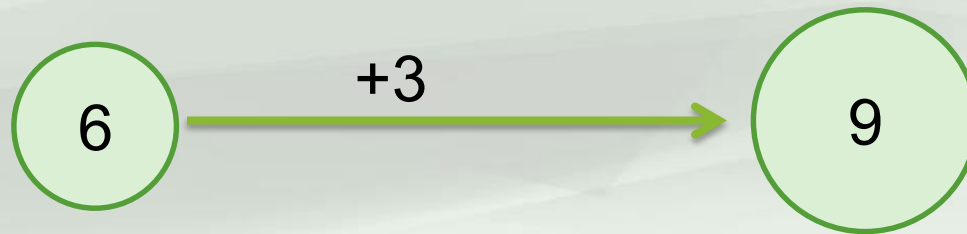
مثال: مریم ۶ سال دارد، سارا از او ۳ سال بزرگتر است، پس سارا ۹ ساله است.



عدد اول یک اندازه را بیان می کند، عدد دوم، رابطه (۳ سال بزرگتر) بین دو اندازه ۶ و ۹ را نشان می دهد.

• تبدیل اندازه:

یک عامل روی یک اندازه تاثیر می‌گذارد و باعث تغییر آن در طی زمان می‌شود.
مثال: صبح امروز هوا 6° است. بعد از ظهر 3° گرمتر خواهد شد. پس بعد از ظهر هوا 9° درجه خواهد بود.



یک تبدیل (گرمتر شدن هوا) روی یک اندازه (6°) اثر می‌گذارد و آن را (3°) تغییر می‌دهد.

تعبیرهای مفهوم تفریق: ؟

فعالیت :
مثال های جمع

تعابیر جمع و تفریق (کارپنتر^۲ و همکاران ۱۹۸۲):

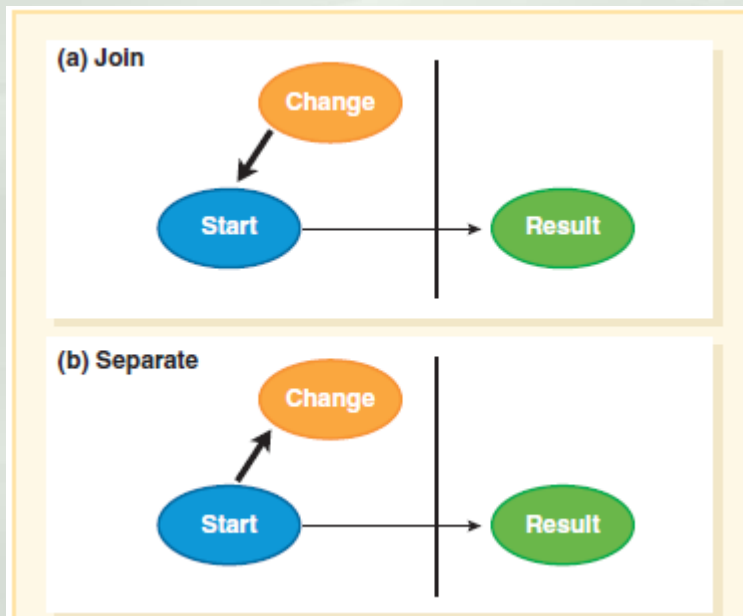
- **تغییر:** مجموعه با تعداد معینی، در طی زمان تغییر می کند.

- **افزایشی:** مجموعه با تعداد معینی، در طی زمان افزایش می یابد.

مثال: دمای هوا صبح ۳ درجه است، عصر ۵ درجه گرمتر میشود. دمای هوا عصر ۸ درجه است.

- **کاهشی:** مجموعه با تعداد معینی، در طی زمان کاهش می یابد.

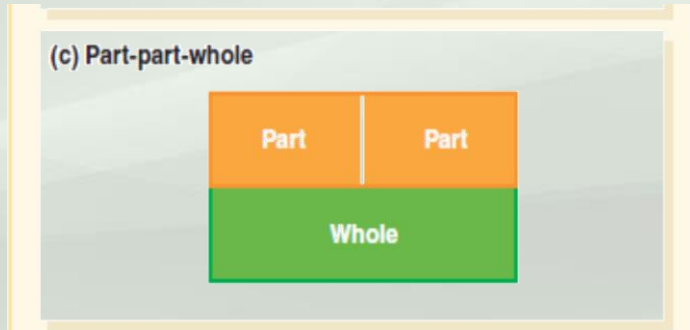
مثال: علی سال ۸۰ کیلوگرم وزن داشت، در طی زمان او ۵ کیلوگرم از دست داد. اکنون او اکنون ۷۵ کیلوگرم است.



(تصویر از کتاب Van de Walle ص ۱۴۹)

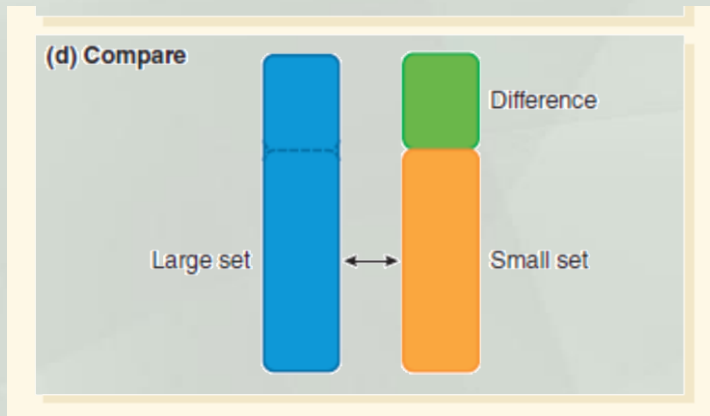
2- Carpenter, T., P. et al.

- **جز-جز-کل: (معادل تعبیر ترکیب):** شامل روابط ثابتی بین یک مجموعه و دو زیر مجموعه از آن مجموعه‌اند. این دو مجموعه ترکیب میشوند و مجموعه کل را بوجود می‌آورند.



مثال: سپیده ۴ سیب و ۵ پرتقال دارد، روی هم ۹ میوه دارد.

- **مقایسه (معادل تعبیر رابطه):** شامل روابطی بین کمیت‌هاست. عمل روی هم ریختن یا جدا کردن وجود ندارد، اما دو مجموعه متفاوت و جدا از هم با هم مقایسه می‌شوند.

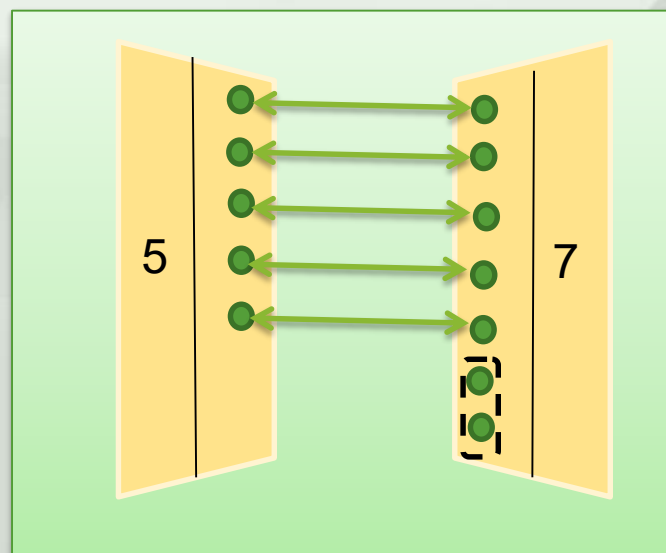
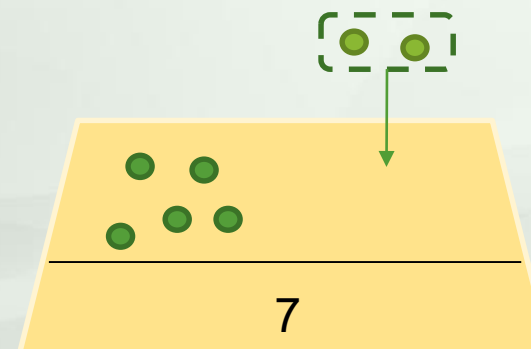
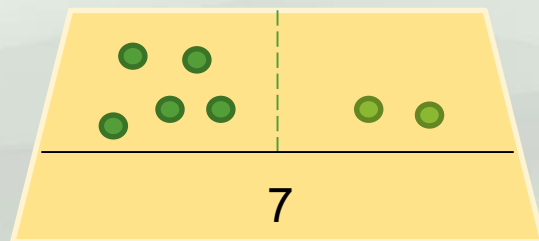


مثال:

شادی ۸ کتاب و بهار ۵ کتاب دارند. شادی ۳ کتاب بیشتر از بهار دارد.
محمد ۳ سال کوچکتر از برادرش است. او ۵ سال دارد. برادرش ۸ سال دارد.

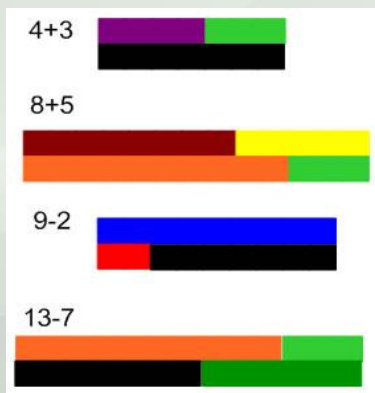
بازنمایی تعبیرهایی از جمع به کمک ژتون‌ها:

کدام تعبیرها؟



بازنمایی‌های تعبیر ترکیب جمع به کمک ابزار و مدل‌ها:

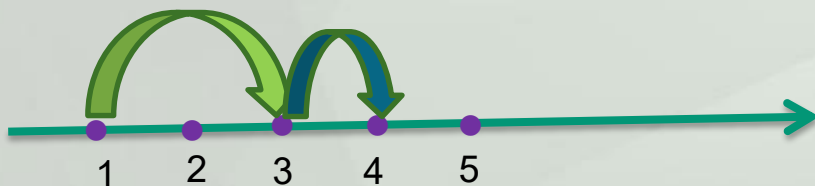
- وسایل ملموس و شهودی



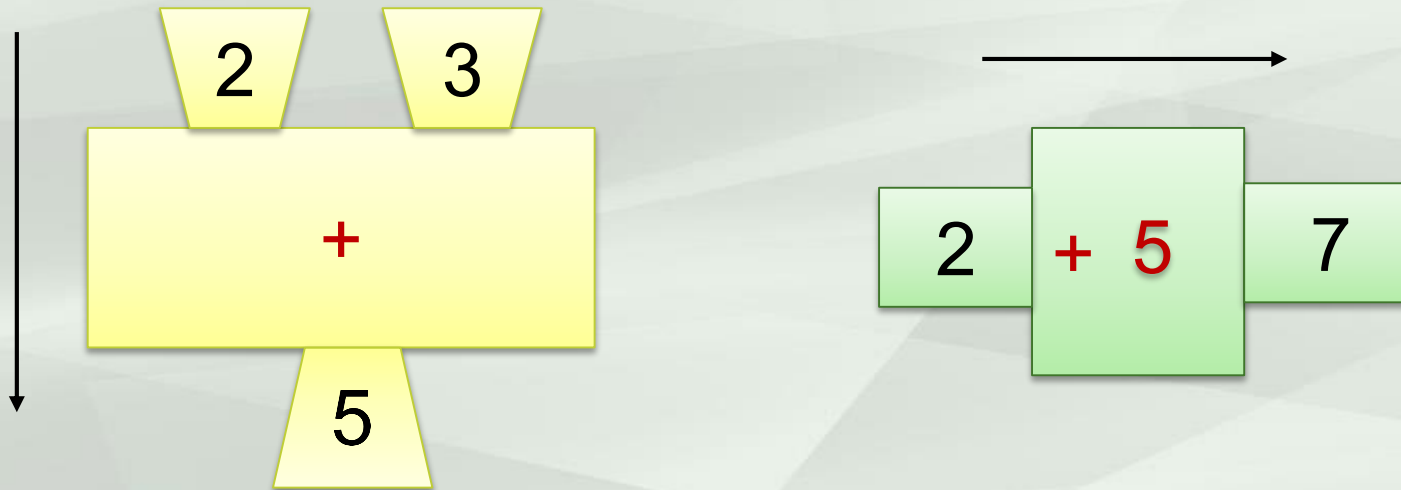
- نمایش تصویری مجموعه‌ها (نمایش ون)



- محور اعداد



- بوسیله ماشین عمل یا عملگر



• تعبیر تغییر (افزایشی) جمع

کتاب ریاضی پایه
اول دبستان



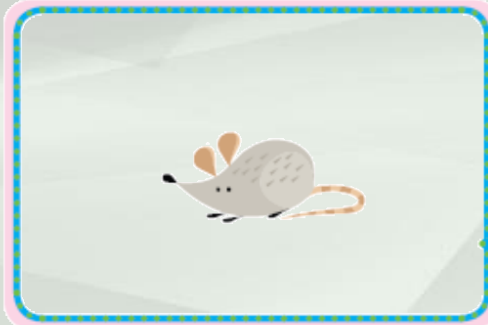
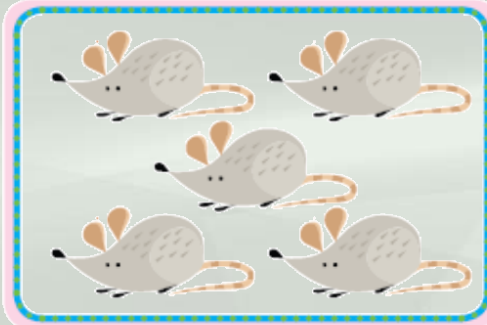
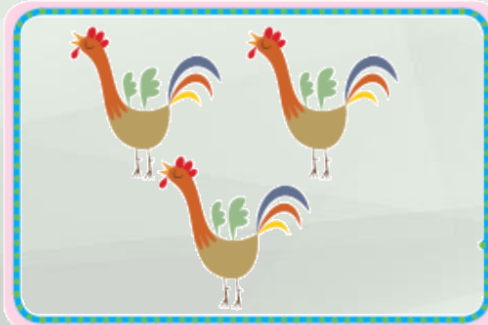
هر دسته چند تا شکل دارد؟ اگر ۲ تا شکل دیگر اضافه کنیم چند تا می شود؟
بچه الگورا به همان ترتیب ادامه بده.



• تعبیر جز-جز-کل جمع

کتاب ریاضی پایه
اول دبستان ص ۶۶

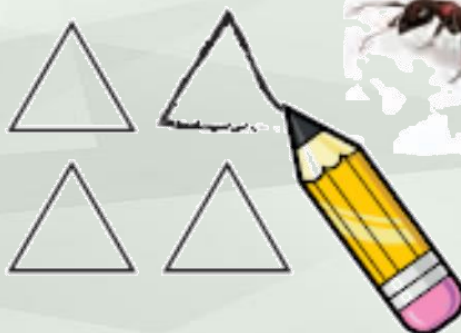
شکل های هر دو دسته روی هم چند تا می شوند؟ جواب را با چوب خط نشان بده.
با چوب خط نشان بده اندازه ی مداد چند تا چینه است.



• تعبیر مقایسه‌ای جمع (به صورت ضمنی)

در هر قسمت در سمت راست آن قدر شکل بکش که تعداد آن با دسته‌ی سمت چپ برابر شود.
شکل را طوری کامل کن که دو نیمه‌ی آن مثل هم باشد.

بشمار و
بنویس

									
	<table border="1"><tbody><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table>								

کتاب ریاضی پایه اول
دبستان ص ۷۲

- جمع‌های اساسی
- جمع‌های ترکیبی
- جمع فرآیندی
- خواص جمع و تفریق (جا به جایی، شرکت پذیری، عضو خنثی)
- کمک به درک حقایق عددی (جمع و تفریق)

کتاب ریاضی پایه اول دبستان



بشمار و رنگ کن

مانند نمونه برای هر عدد از یک رنگ استفاده کن و با رنگ کردن جواب جمع را پیدا کن.
جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کن. نمونه آخر را خودت رنگ کن.





$$1 + 3 + 2 = \underline{\quad}$$



$$2 + 2 + 2 = \underline{\quad}$$



$$0 + 2 + 4 = \underline{\quad}$$



$$\quad + \quad + \quad = 7$$



$$\quad + \quad + \quad = 7$$



$$\quad + \quad + \quad = 7$$

بزرگ و کوچک

۹۷

هدف این فعالیت تمرین جمع ۳ عدد است. مثال آخر انتخاب های متفاوتی دارد.
در صورتی که فرزند شما آمادگی دارد می تواند جمع های با عددهای کوچک را به صورت ذهنی تمرین کند.

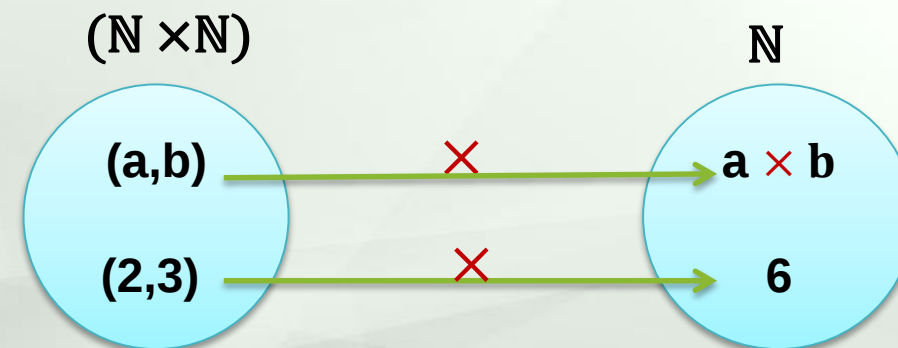
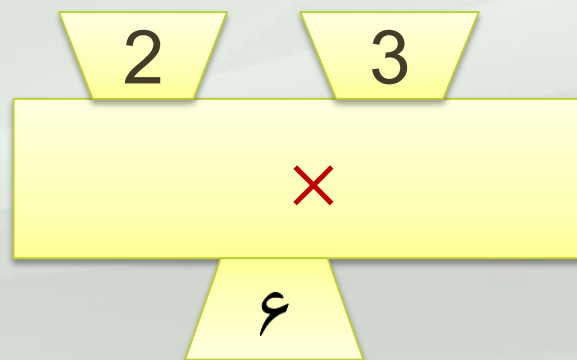
• جمع های ترکیبی یک عدد

عمليات – ضرب و تقسيم

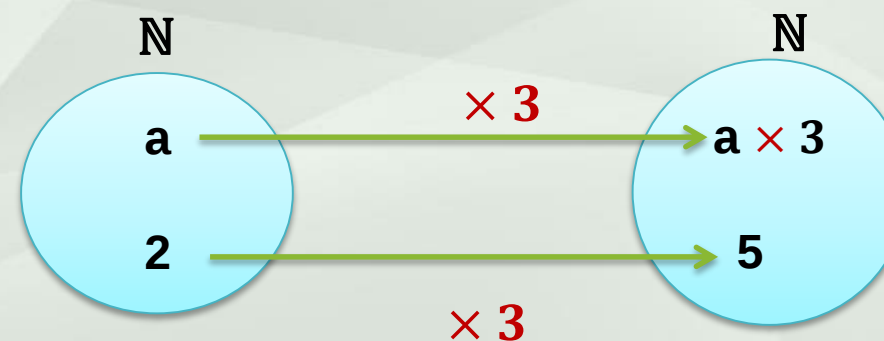
عملیات – ضرب و تقسیم

- تعبیرهای ضرب
- تعبیرهای تقسیم
- بازنمایی های مختلف ضرب و تقسیم
- خواص ضرب و تقسیم
- کمک به درک حقایق عددی (ضرب و تقسیم)

ضرب یک عمل دوتایی است:



ولی می تواند نقش یک عملگر را داشته باشد:



برخی از تعابیر مختلف ضرب و تقسیم (ورنیو (۱۹۹۱)، اشمیت و ویسر^۳ (۱۹۹۵):

- **کاردینالی یا اندازه‌گیری:** دو کاردینال یا دو اندازه یا از یک جنس با هم ترکیب می‌شوند و یک اندازه از جنس دیگر نتیجه می‌دهند.

مثال: اضلاع یک مستطیل به ترتیب ۳ و ۵ متر هستند. مساحت آن ۱۵ متر مربع است.

- **مقایسه ضربی:** دو اندازه توسط یک رابطه به هم مربوط می‌شوند.

مثال: علی ۱۲ سال دارد، پدرش ۳ برابر او سن دارد. پدر علی ۳۶ سال دارد.
جمعیت یک شهر ۳ میلیون نفر بوده. در طی ده سال این جمعیت ۲ برابر شده. جمعیت کنونی شهر ۶ میلیون نفر است.

- **تکرار مجموعه‌های برابر:** یک مجموعه با یک کاردینال ثابت، چندین بار تکرار می‌شود.

مثال: من ۴ بسته تخم مرغ دارم، هر بسته ۶ تا تخم مرغ دارد. در مجموع ۲۴ تخم مرغ دارم.

مثال: من ۴ بسته تخم مرغ دارم، هر بسته ۶ تا تخم مرغ دارد. در مجموع ۲۴ تخم مرغ دارم.

$$\overbrace{6 + 6 + 6 + 6}^{۴ \text{ بار}} = ۲۴$$

این تعبیر ضرب، جمع تکراری محسوب می شود:

عدد اصلی هر مجموعه

$$4 \times 6 = 24$$

تعداد مجموعه ها

تعابير مختلف ضرب و تقسيم (ورنيو^٧):

TABLE 13-1. Situations Modelled by Multiplication and Division

Class	Multiplication problem	Division (by multiplier)	Division (by multiplicand)
Equal groups	3 children each have 4 oranges. How many oranges do they have altogether?	12 oranges are shared equally among 3 children. How many does each get?	If you have 12 oranges, how many children can you give 4 oranges?
Equal measures	3 children each have 4.2 liters of orange juice. How much orange juice do they have altogether?	12.6 liters of orange juice is shared equally among 3 children. How much does each get?	If you have 12.6 liters of orange juice, to how many children can you give 4.2 liters?
Rate	A boat moves at a steady speed of 4.2 meters per second. How far does it move in 3.3 seconds?	A boat moves 13.9 meters in 3.3 seconds. What is its average speed in meters per second?	How long does it take a boat to move 13.9 meters at a speed of 4.2 meters per second?
Measure conversion	An inch is about 2.54 centimeters. About how long is 3.1 inches in centimeters?	3.1 inches is about 7.84 centimeters. About how many centimeters are there in an inch?	An inch is about 2.54 centimeters. About how long in inches is 7.84 centimeters?
Multiplicative comparison	Iron is 0.88 times as heavy as copper. If a piece of copper weighs 4.2 kg how much does a piece of iron the same size weigh?	Iron is 0.88 times as heavy as copper. If a piece of iron weighs 3.7 kg, how much does a piece of copper the same size weigh?	If equally sized pieces of iron and copper weigh 3.7 kg and 4.2 kg respectively, how heavy is iron relative to copper?
Part/whole	A college passed the top 3/5 of its students in an exam. If 80 students did the exam, how many passed?	A college passed the top 3/5 of its students in an exam. If 48 passed, how many students sat the exam?	A college passed the top 48 out of 80 students who sat an exam. What fraction of the students passed?
Multiplicative change	A piece of elastic can be stretched to 3.3 times its original length. What is the length of a piece 4.2 meters long when fully stretched?	A piece of elastic can be stretched to 3.3 times its original length. When fully stretched it is 13.9 meters long. What was its original length?	A piece of elastic 4.2 meters long can be stretched to 13.9 meters. By what factor is it lengthened?
Cartesian product	If there are 3 routes from A to B, and 4 routes from B to C, how many different ways are there of going from A to C via B?	Division If there are 12 different routes from A to C via B, and 3 routes from A to B, how many routes are there from B to C?	
Rectangular area	What is the area of a rectangle 3.3 meters long by 4.2 meters wide?	If the area of a rectangle is 13.9 m ² and the length is 3.3 m what is the width?	
Product of measures	If a heater uses 3.3 kilowatts of electricity for 4.2 hours, how many kilowatt-hours is that?	A heater uses 3.3 kilowatts per hours. For how long can it be used on 13.9 kilowatt-hour of electricity?	

از ضرب به تقسیم:

برای هر موقعیت ضربی $a \times b = c$ ، دو موقعیت تقسیم هم ارز مربوط می شود (به شرط $a \neq 0, b \neq 0$) :

$$c \div a = b, \quad c \div b = a$$

مثال ضرب:

۱- اضلاع یک مستطیل به ترتیب 3^m و 5^m متر هستند. مساحت آن 15^{m2} است.

مثال های تقسیم:

- مساحت مستطیلی 15^{m2} است ، اندازه یکی از اضلاع 3^m و بنابراین ضلع دیگر 5^m می باشد.
 $15 \div 3 = 5$
- مساحت مستطیلی 15^{m2} است ، اندازه یکی از اضلاع 5^m و بنابراین ضلع دیگر 3^m می باشد.
 $15 \div 5 = 3$

۲- علی ۴ توپ دارد، احمد سه برابر توپ دارد. احمد ۱۲ توپ دارد.

- احمد ۱۲ و علی ۴ توپ دارند. احمد سه برابر علی توپ دارد.
 $12 \div 4 = 3$
- احمد ۱۲ توپ دارد . او سه برابر علی توپ دارد. بنابراین علی ۴ توپ دارد.
 $12 \div 3 = 4$

۳- من چهار جعبه ۶ تایی تخم مرغ دارم، در مجموع ۲۴ تخم مرغ دارم.

- من ۲۴ تخم مرغ را در ۴ جعبه به طور مساوی پخش کردم. هر جعبه ۶ تخم مرغ دارد.
 $24 \div 4 = 6$
- من ۲۴ تخم مرغ را در جعبه هایی ۶ تایی تخم مرغ پخش کردم. تعداد جعبه ها ۴ تا می باشد.
 $24 \div 6 = 4$

تعابیر تقسیم

تقسیم شراکتی:

وقتی یک اندازه یا مقدار (گسسته یا پیوسته) را به تعداد قسمتهای مساوی تقسیم کنیم، خارج قسمت بیانگر اندازه یا عدد اصلی هر یک از قسمت ها است.

مثال: ۲۴ تعداد عدد تخم مرغ در ۴ جعبه به طور مساوی پخش شده، هر جعبه ۶ تخم مرغ دارد.

تقسیم کاهشی:

وقتی یک اندازه یا مقدار (گسسته یا پیوسته) ، به قسمتهایی مساوی از نظر اندازه یا مقدار تقسیم میشود، خارج قسمت بیانگر تعداد این قسمت ها است.

مثال: تعداد ۲۴ تخم مرغ در جعبه هایی ۶ تایی تخم مرغ پخش شده، تعداد این جعبه ها ۴ تا است.

تعداد بسته ها → $24 \div 4 = 6$ ← عدد اصلی هر بسته

عدد اصلی کل مجموعه ←

عدد اصلی هر بسته → $24 \div 6 = 4$ ← تعداد بسته ها

عدد اصلی کل مجموعه ←

برخی از بازنمایی‌های ضرب :

۱- بازنمایی شهودی به کمک ابزار دست‌ورزی آموزشی

نوارهای کوییزنر، چینه‌ها، ژتون‌ها، مکعب‌های دینز، کارتهای پنجره‌ای و ...

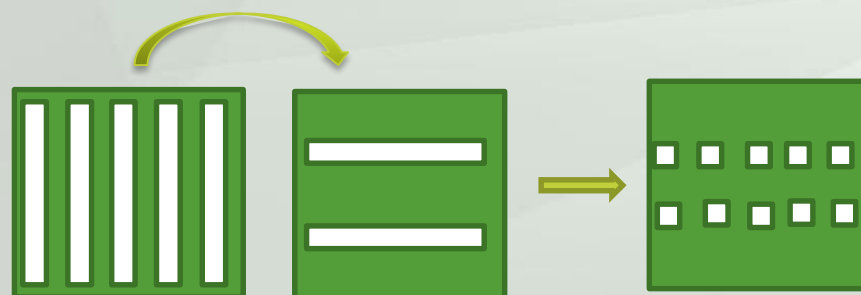
$$5 \times 2$$



نوار کوییزنر



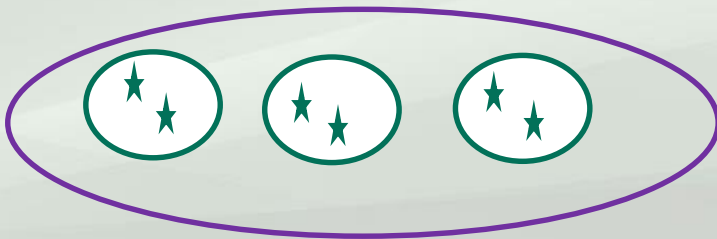
ژتون‌ها



کارتهای ضرب پنجره‌ای

۲- بازنمایی مجموعه‌ای:

– اجتماع مجموعه‌های هم عدد جدا از هم



– حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

	c	d	e
α	(α, c)	(α, d)	(α, e)
β	(β, c)	(β, d)	(β, e)

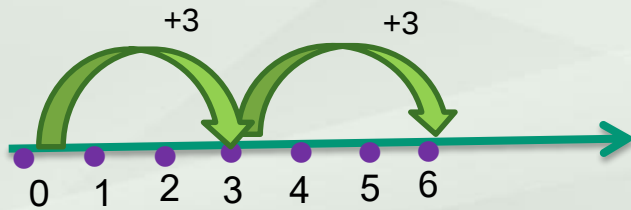
$$X = \{\alpha, \beta\}$$

$$Y = \{c, d, e\}$$

$$X \times Y = \{(\alpha, c), (\alpha, d), (\alpha, e), (\beta, c), (\beta, d), (\beta, e)\}$$

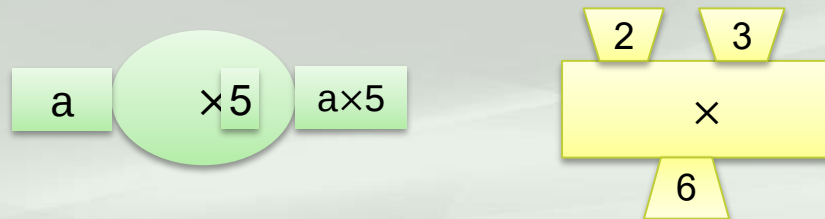
$$\text{عدد اصلی}(Y) \times \text{عدد اصلی}(X) = \text{عدد اصلی}(X \times Y)$$

۳- بازنمایی به کمک محور اعداد



$$2 \times 3 = 6$$

۴- بازنمایی به کمک نمایش ماشین عمل و عملگر

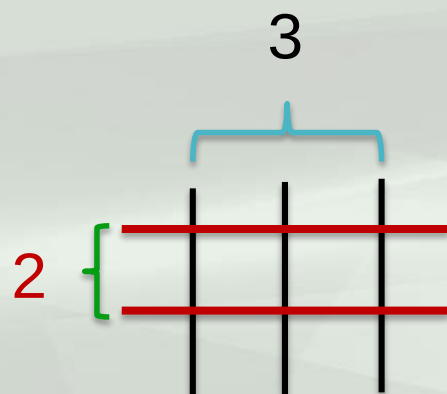


۵- بازنمایی به کمک مساحت مستطیل



۶- بازنمایی به کمک نمایش گرافیکی: جدول تصاویر تقاطعی، جدول مکعبهای دینز، ...

• جدول تصاویر تقاطعی



$$2 \times 3 = 6$$

• جدول مکعب های دینیز

$$2 \times 3 = 6$$

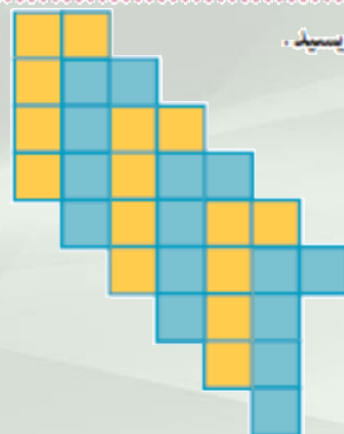
	
	

ضرب به تعبیر تکرار مجموعه های برابر

کتاب ریاضی پایه سوم
دبستان ص ۶۳

روش های نمادین

شمردن مربع ها را در فصل اول یاد گرفتید. به کمک آن برای هر شکل یک عبارت بنویسید.



دسته کاشی _____ تایی می شود _____ مربع.



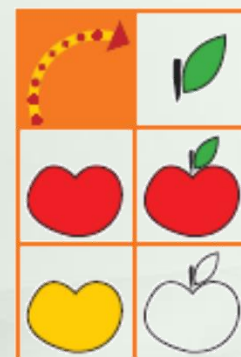
۴ دسته کاشی ۴ تایی می شود _____ مربع.

کتاب ریاضی پایه
اول دبستان ص ۲۱



کامل کن

مانند نمونه جدول را کامل کن.



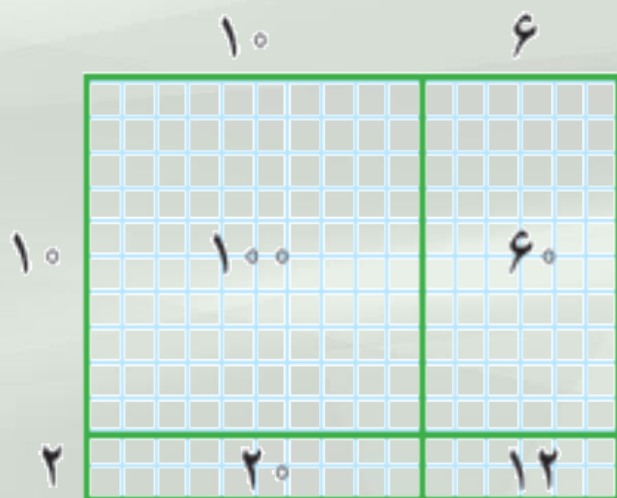
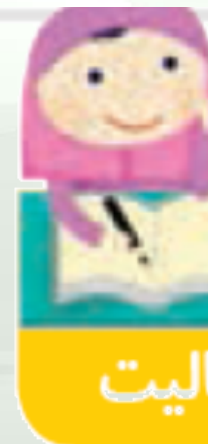
ضرب دکارتی



۲۱

برای کامل کردن هر قسمت (مربع کوچک) به سطر و ستون‌ها و ترکیب آن‌ها اشاره شود تا دانش‌آموز یک کل را با اجزای داده شده بسازد.
می‌توان این فعالیت را با اشیا و اسباب بازی‌ها نیز به صورت عملی انجام داد.

با توجه به شکل، حاصل ضرب را به دست آورید و جاهای خالی را پر کنید.



روش اول

۱۶

× ۱۲

۱۰۰

۶۰

۲۰

+ ۱۲

۱۰ × ۱۰
۱۰ × ۶

۱۰ × ۱۶

۲ × ۱۰
۲ × ۶

۲ × ۱۶

روش دوم

۱۶

× ۱۲

۱۶۰

۳۲

۱۰ × ۱۶

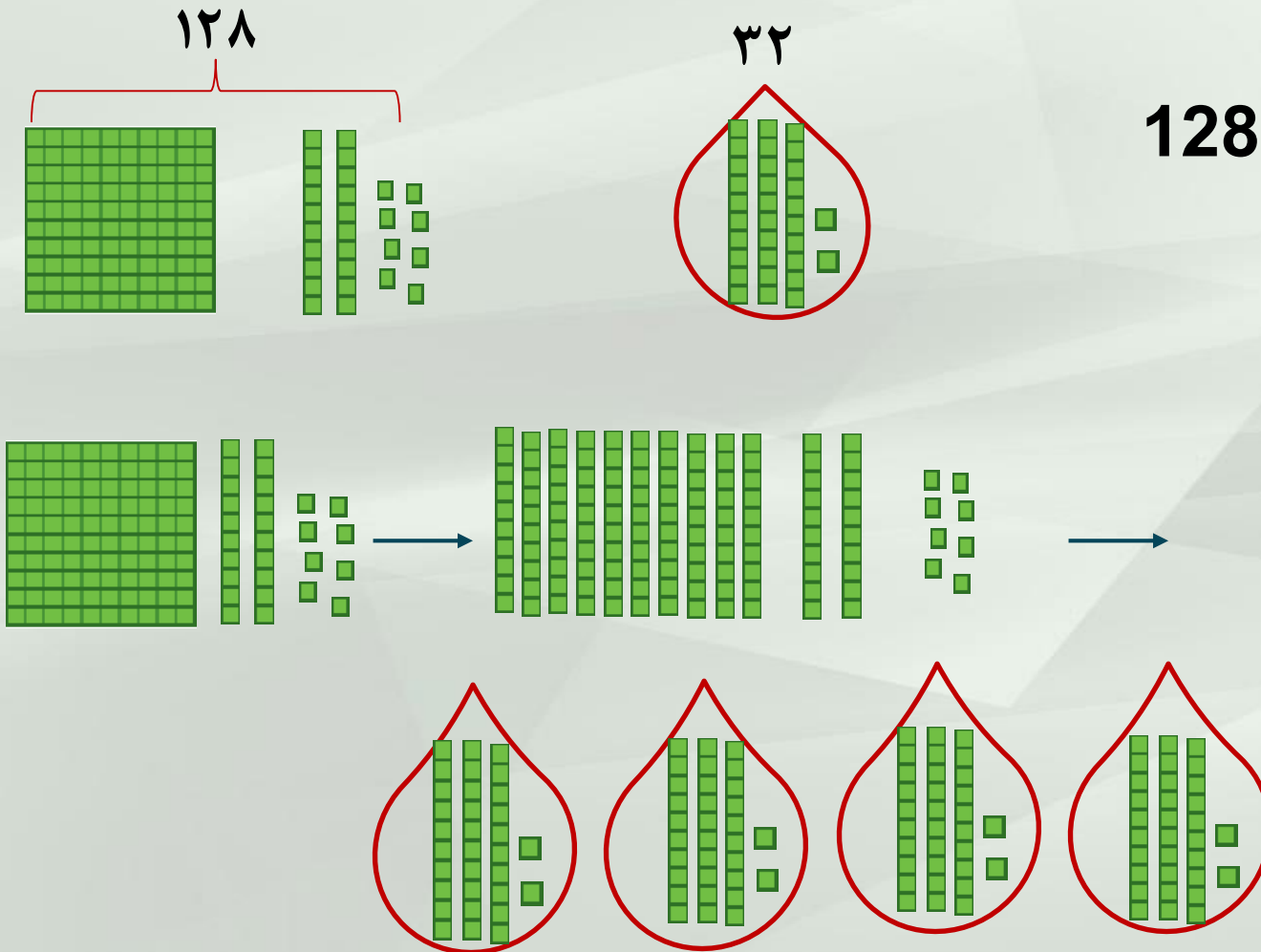
۲ × ۱۶

بازنمایی تقسیم به کمک مکعب‌های دینز^۴:

- تقسیم به تعبیر کاهش

$$128 \div 32 =$$

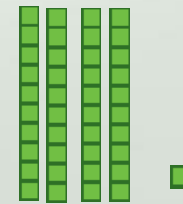
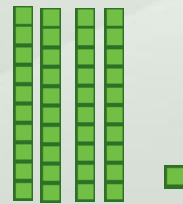
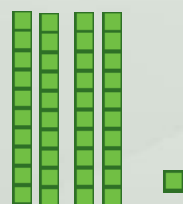
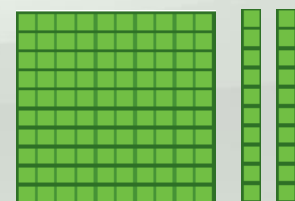
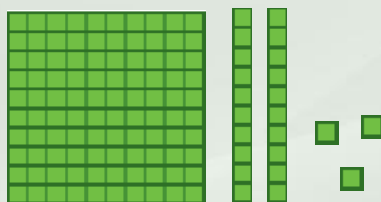
$$128 \div 32 = 4$$



4- Dienes

- تقسیم شراکتی

$$123 \div 3$$



$$123 \div 3 = 41$$

مفهوم ارزش مکانی

عدد نویسی به روش ارزش مکانی

این گونه عدد نویسی چه زمانی مورد استفاده قرار می گیرد؟

یکان	دهگان	صدگان
۴	۳	۲

- منشاء پیدایش : ایده دسته بندی.
- برای سازمان دهی مقدار کمی اشیاء به جهت سهولت ارتباطات.
- مشکلات دانش آموزان:

- در مثال رو به رو چطور باید ۸ ده تایی را از ۳ ده تایی کم کنیم؟

$$\begin{array}{r} 237 \\ - 87 \\ \hline \end{array}$$

- **شناخت اصل کاردینال:** عدد آخر لیست شمارش بیانگر تعداد کل اشیاء مجموعه می باشد. (یعنی مثلاً بعد از شمارش ۵ عضو، ۵ نماینگر تعداد کل مجموعه در نظر گرفته شود و نه فقط به عنوان آخرین عضو مجموعه). مثلاً برای فهم دسته بندی ده تایی و صد تایی این اصل باید شکل گرفته باشد.

- **بقاء واحد های اندازه گیری** (یکی ، ده تایی، صد تایی، ...)

این واحد ها یعنی مثلاً ده تایی ها تکراری (مثلاً ۴۰ یعنی ۴ تا ده تایی یا $۱۰+۱۰+۱۰+۱۰$) و همچنین شمول پذیرند یعنی یکی ها در ده تایی و یکی و ده تایی ها در صد تایی موجودند (مثلاً ۴ ده تایی یا ۴۰ یکی).

ده تایی	یکی
۴	۰

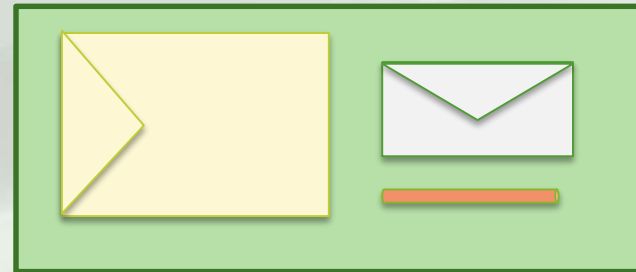
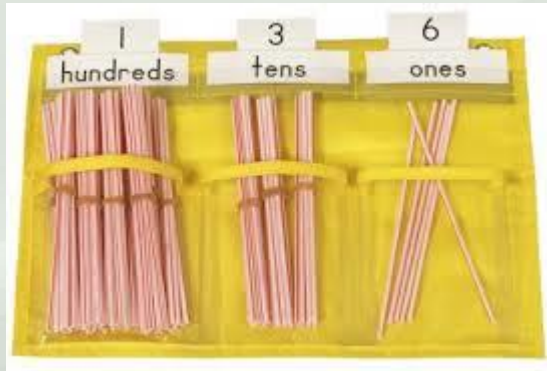
پرسش:

چند صدتایی در عدد ۲۳۴ موجود است؟

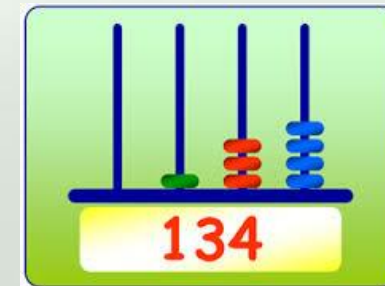
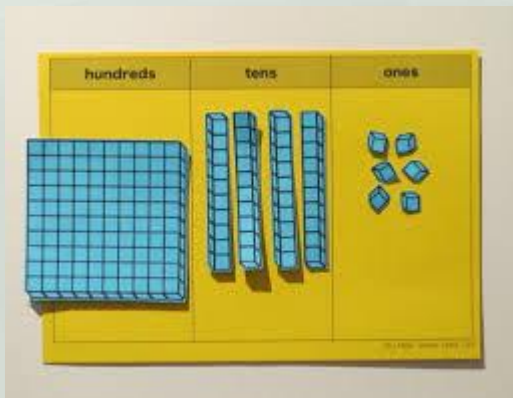
چند دهتایی در عدد ۲۳۴ موجود است؟

چند یکی در عدد ۲۳۴ موجود است؟

ابزار کمک آموزشی برای تفهیم ارزش مکانی

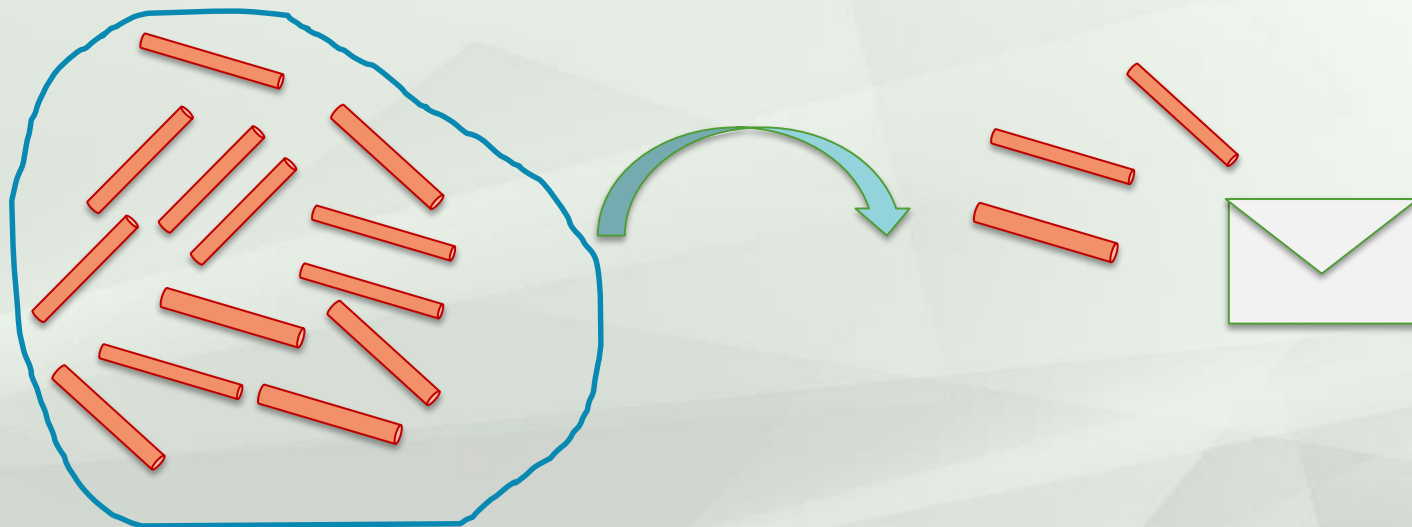


- بسته بندی با نی
- ژتون و و پاکت های رنگی
- استفاده از مکعب های دینیز



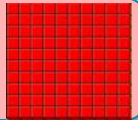
- چرتکه

شروع یک فعالیت:

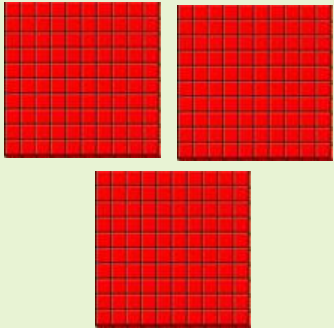
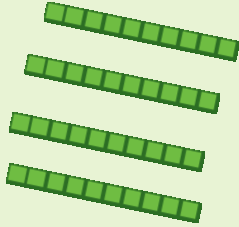


		دهتایی	یکی	دهگان	یکان
۱۳	۱۳	۱	۳	یا	
۱	۳	۱	۳		

بازنمایی عدد طبیعی به وسیله مکعب های دینز

+	صدتایی 	دهتایی 	یکی 

بازنمایی عدد طبیعی به وسیله مکعب های دینز

صدتایی	دهتایی	یکی
		

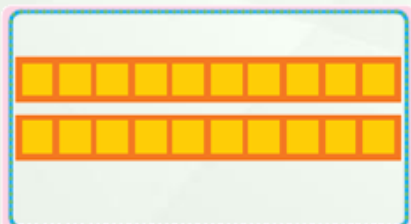
$$347 = 300 + 40 + 7$$

ارزش مکانی

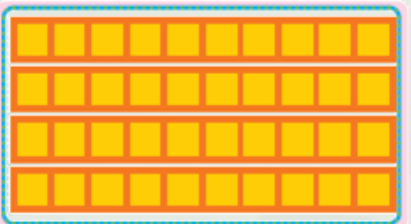
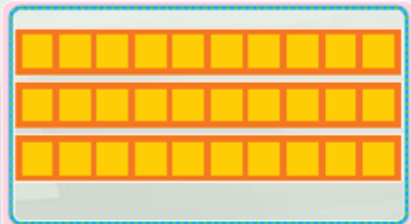
کتاب ریاضی پایه
اول دبستان

	<table><tbody><tr><td>ده تایی</td><td>یکی</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></tbody></table>	ده تایی	یکی		
ده تایی	یکی				
	<table><tbody><tr><td>ده تایی</td><td>یکی</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></tbody></table>	ده تایی	یکی		
ده تایی	یکی				
	<table><tbody><tr><td>ده تایی</td><td>یکی</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></tbody></table>	ده تایی	یکی		
ده تایی	یکی				

کتاب ریاضی پایه اول
دبستان



$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$



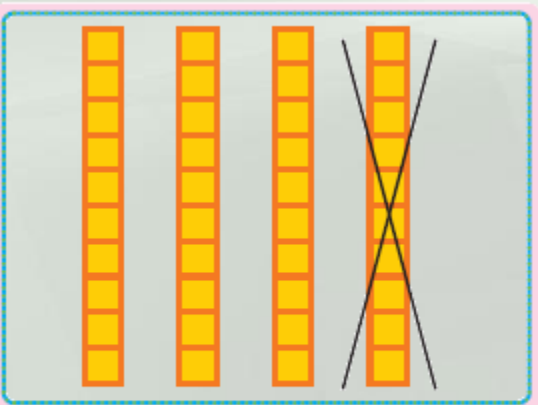
$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

$$40 + 30 = \underline{\hspace{2cm}}$$

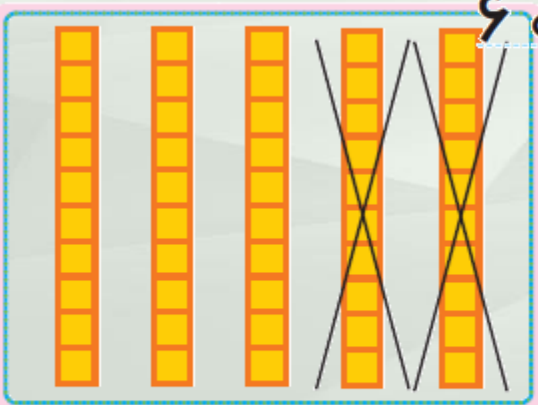
$$50 - 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$20 + 40 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$60 - 50 = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$40 - 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

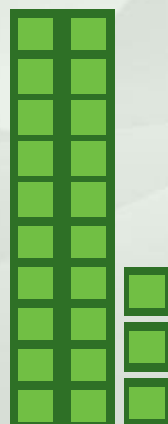
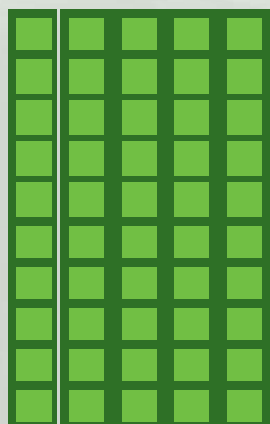
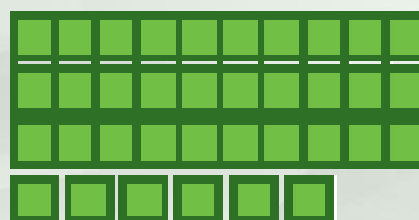
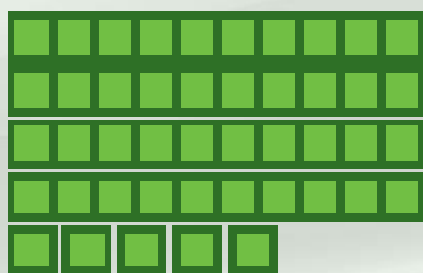


$$\underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

دسته‌های ده تایی و یکی



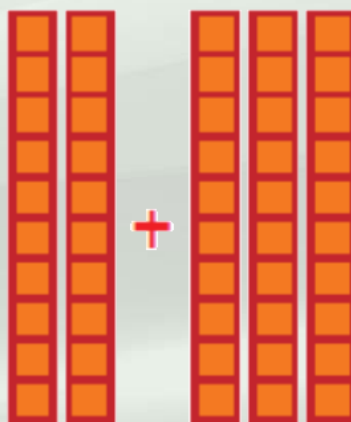
با توجه به شکل جدول‌ها را کامل کنید :



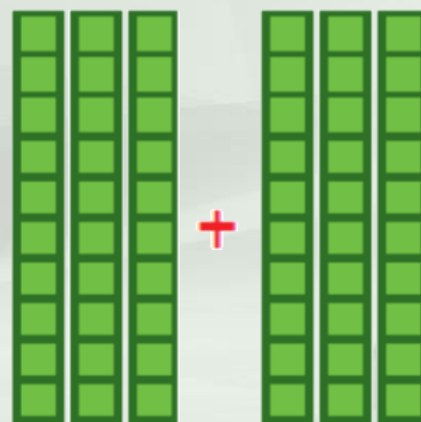
جمع و تفریق ده تایی



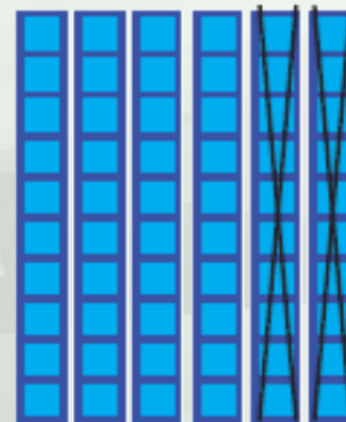
الف) با توجه به شکل، حاصل جمع و تفریق‌ها را پیدا کنید.



$$\text{---} + \text{---} = \text{---}$$



$$\text{---} + \text{---} = \text{---}$$



$$\text{---} - \text{---} = \text{---}$$



ب) با دسته‌های ده تایی که آموزگار به هر گروه می‌دهد، حاصل جمع و تفریق‌ها را به دست آورید.

$$۴۰ + ۲۰ = \text{---}$$

$$۳۰ - ۳۰ = \text{---}$$

$$۸۰ - ۳۰ = \text{---}$$

$$۷۰ - ۲۰ = \text{---}$$

$$۵۰ + ۲۰ = \text{---}$$

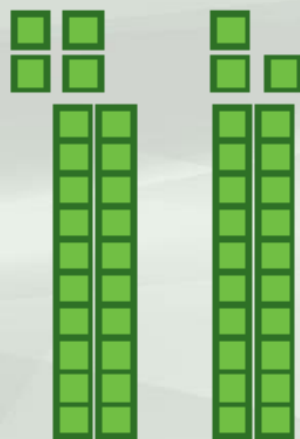
$$۹۰ - ۶۰ = \text{---}$$

کتاب ریاضی پایه
دوم دبستان ص ۲۸

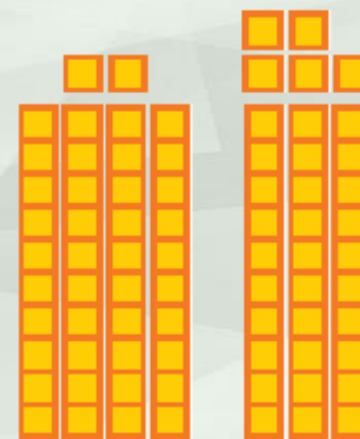
جمع و تفریق دو عدد دو رقمی



۲- با توجه به شکل‌ها، حاصل جمع‌ها را پیدا کنید.



--- + --- = ---



--- + --- = ---

برای جمع کردن دو عدد دو رقمی ابتدا دسته‌های ده‌تایی را با هم جمع می‌کنیم، سپس یکی‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

جمع فرآیندی

کتاب ریاضی پایه
دوم دبستان

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 23 \\ \hline 57 \end{array}$$

اضافه کردن ده تایی‌ها

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 3 \\ \hline 37 \end{array}$$

اضافه کردن یکی‌ها

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 20 \\ \hline 54 \end{array}$$

حاصل جمع دو عدد

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 20 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ + 3 \\ \hline 57 \end{array}$$

۱- مجید جمع $34+23$ را به صورت ستونی نوشت و جواب جمع را به صورت روبه‌رو به دست آورد. شما توضیح دهید جواب‌های ۵۴ و ۵۷ چگونه به دست آمده است.



۲- مجید تفریق $47-22$ را به صورت ستونی نوشت و جواب تفریق را به صورت زیر به دست آورد. شما توضیح دهید جواب‌های ۲۵ و ۲۷ چگونه به دست آمده است.

$$\begin{array}{r} 47 \\ - 22 \\ \hline 25 \end{array}$$

کم کردن ده تایی‌ها

$$\begin{array}{r} 47 \\ - 2 \\ \hline 45 \end{array}$$

کم کردن یکی‌ها

$$\begin{array}{r} 47 \\ - 20 \\ \hline 27 \end{array}$$

حاصل تفریق دو عدد

$$\begin{array}{r} 47 \\ - 20 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 2 \\ \hline 25 \end{array}$$

کتاب ریاضی پایه
دوم دبستان

۱- مانند نمونه جمع و تفریق‌ها را با رسم شکل انجام دهید.

$$\begin{array}{r} ۲۳ \\ + ۱۴ \\ \hline \end{array}$$


$$\begin{array}{r} ۳۱ \\ + ۱۰ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۲۴ \\ + ۳۳ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۴۷ \\ - ۲۲ \\ \hline \end{array}$$

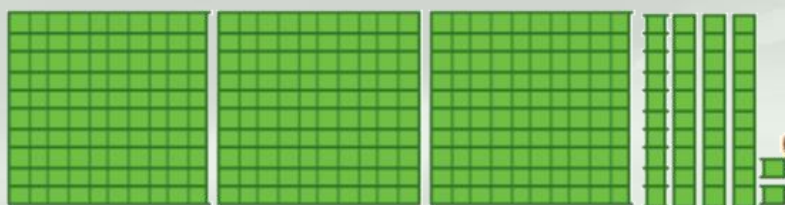
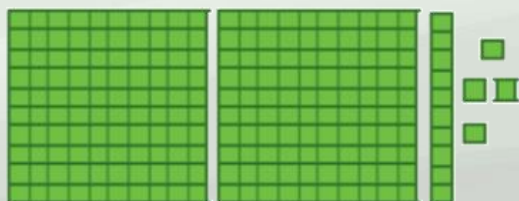

$$\begin{array}{r} ۵۶ \\ - ۳۶ \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ۳۴ \\ - ۲۰ \\ \hline \end{array}$$



جمع فرآیندی

جمع و تفریق عددهای سه رقمی



۱- شکل روبه‌رو عدد ۲۱۴ را نشان می‌دهد.
می‌خواهیم ۳۴۲ تا به آن اضافه کنیم.
ابتدا ۳ دسته‌ی صدتایی به آن اضافه کنید.
سپس ۴ دسته‌ی ۱۰ تایی و در آخر ۲ تا یکی
به آن اضافه کنید.



فعالیت

$$\begin{array}{r} 214 \\ + 342 \\ \hline \end{array}$$

• اضافه کردن ۱۰۰ تایی‌ها ۵۱۴

$$\begin{array}{r} 514 \\ + 42 \\ \hline \end{array}$$

• اضافه کردن ۱۰ تایی‌ها ۵۵۴

$$\begin{array}{r} 554 \\ + 2 \\ \hline \end{array}$$

• اضافه کردن یکی‌ها ۵۵۶

$$\begin{array}{r} 214 \\ + 300 \\ \hline 514 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 514 \\ + 40 \\ \hline 554 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 554 \\ + 2 \\ \hline 556 \end{array}$$

ضرب دو عدد دو رقمی

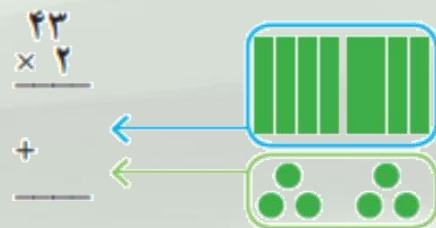


فعالیت

۱- هر دسته‌ی ده تایی را با و یکی‌ها را با ● نشان می‌دهیم.

الف) با توجه به شکل، حاصل ضرب را به دست آورید و جاهای خالی را پر کنید.

$$2 \times (40 + 3) = \quad + \quad =$$



$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 2 \\ \hline + \\ \hline \end{array}$$

ب) حاصل ضرب‌ها را به دست آورید و جاهای خالی را پر کنید.

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 3 \\ \hline 300 \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$3 \times (100 + 20 + 3) =$$

$$300 + \quad + \quad = \quad$$

$$17$$

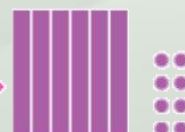
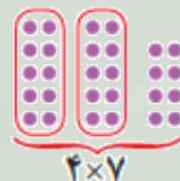
$$\times 4$$

$$+ \quad$$

$$4 \times (10 + 7) =$$

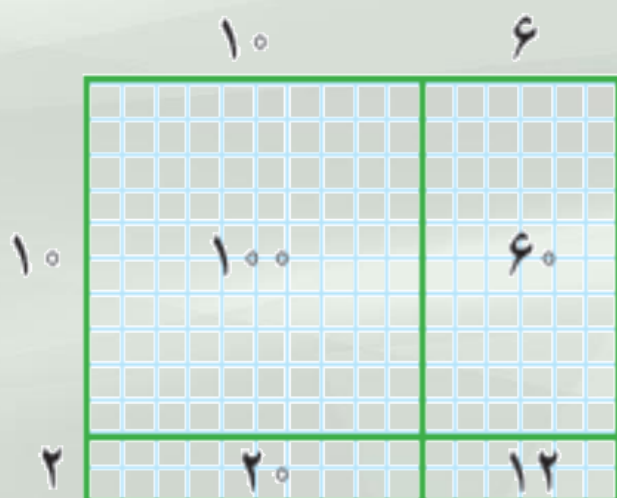
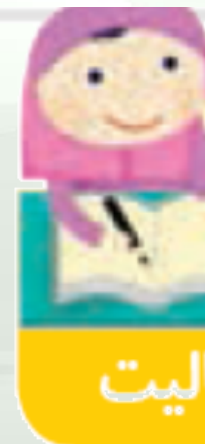
$$\quad + 28 = \quad$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$



۲- الف) با توجه به شکل، توضیح دهید چگونه دو دسته‌ی ده تایی به ۴ دسته‌ی ده تایی اضافه می‌شود.

با توجه به شکل، حاصل ضرب را به دست آورید و جاهای خالی را پر کنید.



روش اول

۱۶

× ۱۲

۱۰۰

۶۰

۲۰

+ ۱۲

—

۱۰ × ۱۰

۱۰ × ۶

۲ × ۱۰

۲ × ۶

۱۰ × ۱۶

۲ × ۱۶

روش دوم

۱۶

× ۱۲

۱۶۰

۳۲

—

۱۰ × ۱۶

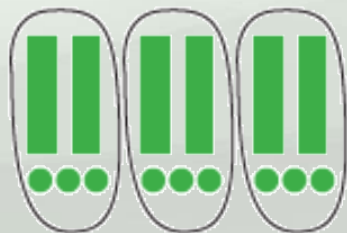
۲ × ۱۶

تقسیم بر عدد دو رقمی

تقسیم به تعبیر کاهشی



۱- در هر قسمت با توجه به تقسیم داده شده، شکل را دسته‌بندی کنید. سپس تقسیم را کامل کنید.



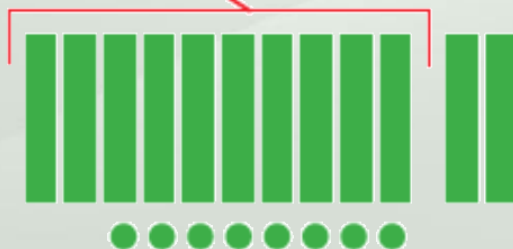
$$\begin{array}{r} 23 \\ 3 \overline{) 69} \\ \underline{} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 48} \\ \underline{} \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 29 \\ 3 \overline{) 87} \\ \underline{} \end{array}$$

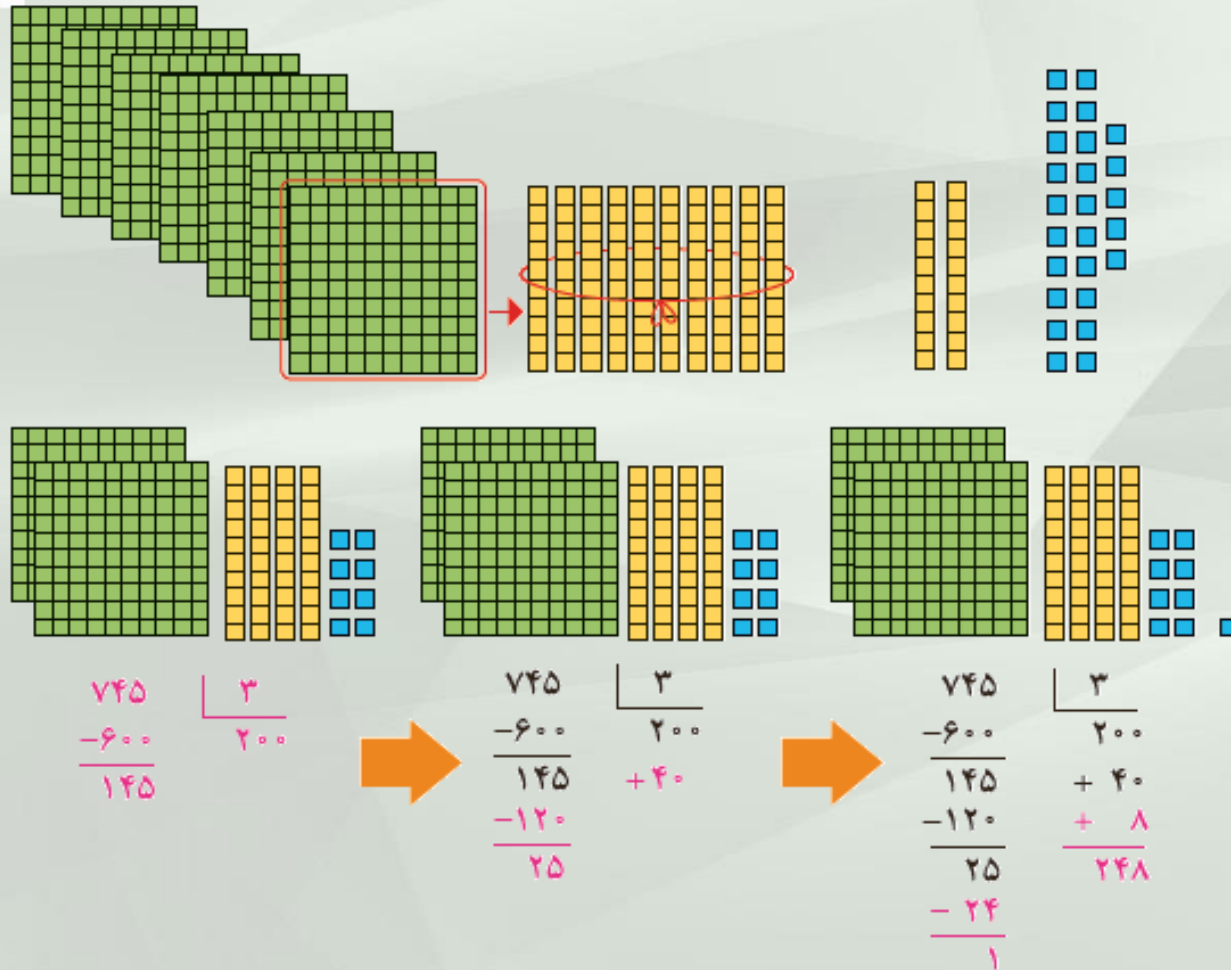


$$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \overline{) 128} \\ \underline{128} \\ 0 \end{array}$$

تقسیم به تعبیر شراکتی



کمیته‌ی امداد امام خمینی بسته‌های لوازم التحریر را برای مناطق محروم ارسال می‌کند. مسئول انبار می‌خواهد ۷۴۵ بسته‌ی موجود را برای ارسال به ۳ منطقه به‌طور مساوی در سه کارتن قرار دهد. در هر کارتن چند بسته قرار می‌گیرد؟ چند تا باقی می‌ماند؟



کتاب ریاضی پایه
ششم دبستان

میله‌ها یا نوارهای کوپیزنر (Cuisenaire rods) :



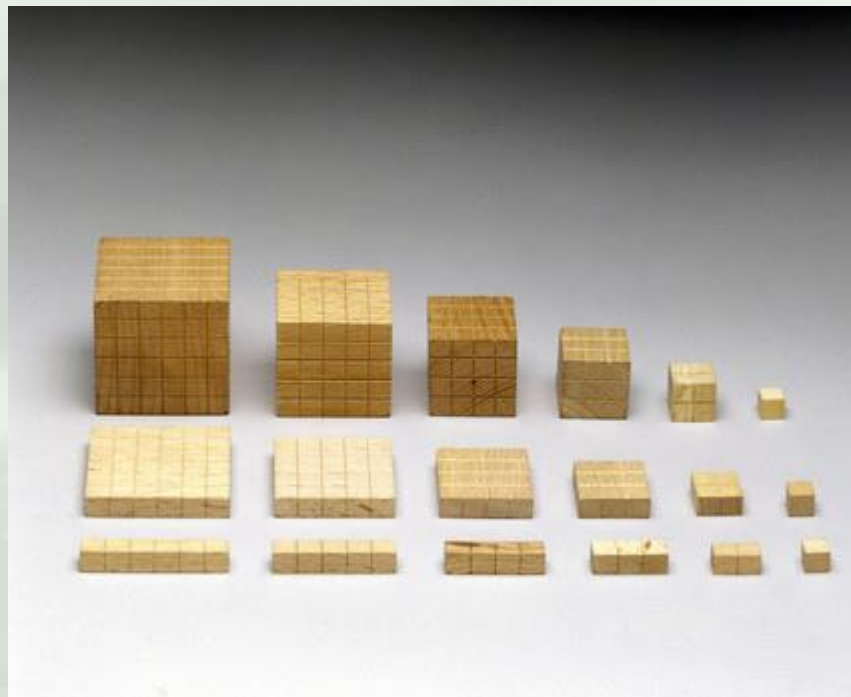
Georges Cuisenaire
(1891–1975)



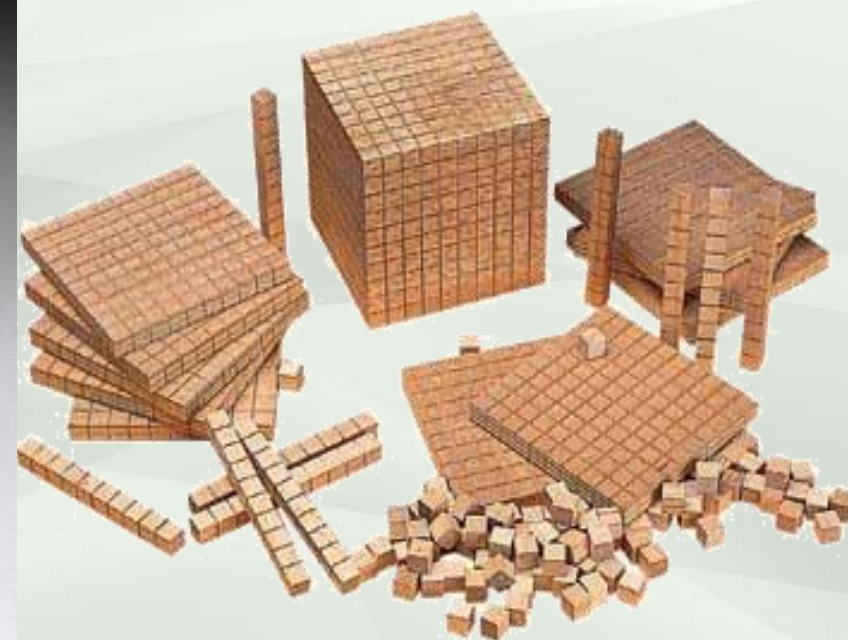
مکعب های دیننس یا چند پایه (Dienes or base ten blocks) :



Zoltan Paul Dienes
(1916-2014)



مکعب های دیننس در پایه های
مختلف



مکعب های دیننس پایه ۱۰

منابع:

- شیخیان، عطیه؛ گویا، زهرا (۱۳۹۱). یادگیری واژه‌های عددی و شمارش. *مجله رشد آموزش ریاضی*، (۴) ۲۹.
- کتاب های ریاضی دوره ابتدایی، وزارت آموزش و پرورش.
- Carpenter, T., P. et al. (1982). The Acquisition of Addition and Subtraction Concept. *Journal for Research in Mathematics Education*. 15 (3):179
- Carpenter, T., P. et al. (1984). The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades one Through three. *Journal for Research in Mathematics Education*. -202 15 (3):179
- DeBlois, L. (1999). Le nombre : son écriture et son sens. *Instantanés Mathématiques*. St-Laurent (Québec), XXXV (3), 5-10.
- Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concepts of number. New York: Springer.
- Georges Ifrah, *Histoire universelle des chiffres*, page 46, Éditions Robert Laffont, Paris 1981.
- Gellman, R. , Gallistel, C. R. (1978) . *The Child's Understanding of Number*, Harvard University Press. pp. 77-82.
- Musser G.L., Peterson B.E., Burger W.F. (2008) . *Mathematics for elementary teachers: A Contemporary Approach* . (8 th ed). New York: Wiley& Sons. NCTM.(2000)
- Mura, R. (1999). Note d'étude de Didactique des nombre naturels, Université Laval.
- Schmidt, S., Weiser, W. (1995). Semantic structures of one-step word problems involving multiplication or division. *Educational studies in Mathematics*, 28:1, pp. 55-72.
- Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2013). (8th Edition). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, , Boston: Pearson.
- Vergnaud, G. (1983). *Aquisition of mathmathcs concepts and process*, In Lesh, R, Landeau, M. (Ed.). Academic Press, pp. 127-174.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. in H. Hiebert, M. Behr (Eds.) *Research Agenda in Mathematics Education : Number concepts and operations in the Middle Grades*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum. pp 141-161.
- Vergnaud, G. (1991). *L'enfant, la Mathémetique et la réalité: problèmes de l'enseignement des mathemetiques à l'école élémentaire*, Chapitre IX. Berne: P.Lang.
- Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_number.